

4^o Math. B. 11

Matheſis. Geometria Specialis.
281.

MISCELLANEVM HYPERBOLICVM, ET PARABOLICVM.

IN QVO PRÆCIPVE AGITVR DE CENTRIS
Gravitatis Hyperbolæ, partium eiusdem,

Atque nonnullorum solidorum, de quibus nunquam Geometria locuta est.

Parabola nouiter quadratur dupliciter.

Ducuntur infinitarum parabolarum tangentes.

Assignantur maxima inscriptibilia, minimaque circumscriptibilia

Infinitis Parabolis, Conoidibus, ac semifusis parabolicis.

Aliaque Geometrica noua exponuntur scitu digna.

AUTHORE
F. STEPHANO DE ANGELIS
VENETO,

Ordinis Iesuatorum S. HIERONYMI, in Veneta
Prouincia Definitorum Prouinciali.

AD ILLVSTRISSIMOS, ET SAPIENTISSIMOS
SENATVS BONONIENSIS
QUINQVAGINTA VIROS.



VENETIIS, MDC LIX.

Apud Ioannem La Nou.

SUPERIORVM PERMISSV.

MISCELLANEOVM

HYPERRBOLICVM.

ET PARABOLICVM.

IN QVO PRÆCIPUE AGITUR DE CANTARIS

Granitum Hyperbole, partium eiusdem

[Faint handwritten text at the bottom of the page]

Handwritten text (likely bleed-through from the reverse side):

Handwritten text (likely bleed-through from the reverse side):

De la nature et des propriétés de l'air.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

Environ. Biol. Fish. (2015) 98:1111–1121

Algebrae Geometricae et Arithmeticae

И Д О Н Т В А

F. STEPHANO DE ANGELIS

Y E N E T O

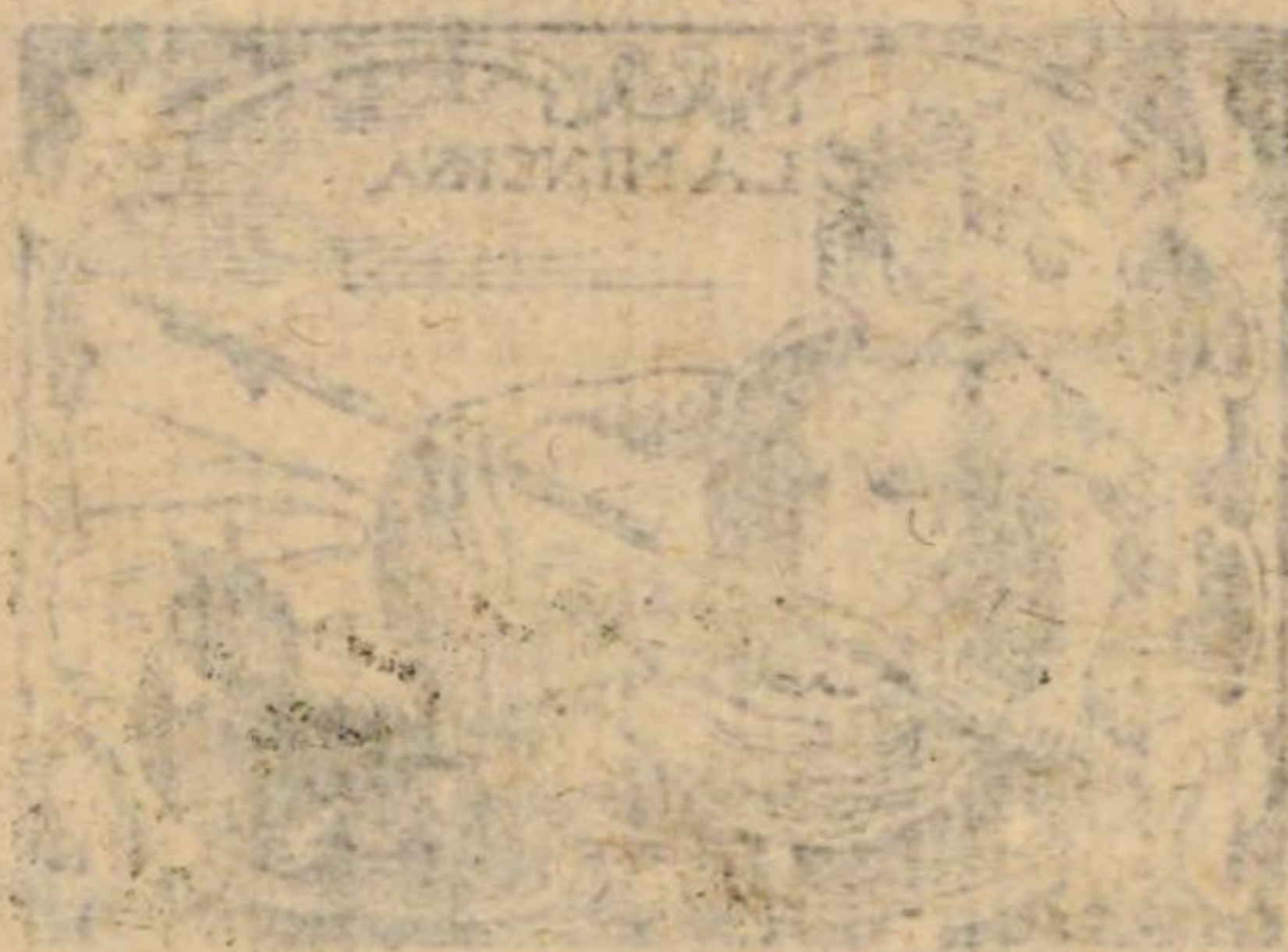
Ordinis Isidororum 2. HIERONYMI in Nova

Provincia Defensoris Provincialis.

AD ILLVSTRISSIMOS. ET SAPIENTISSIMOS.

SEMAVS BONNENSIS

2014 AT1040140



V. ENF. T. 12. M. DC. LIX.

Applied to the Court

2ND BRIGADE 1ST DIVISION

Bayerische
Staatsbibliothek
München



Illustrissimis, & Sapientissimis
BONONIENSIS SENATVS
QVINQVAGINTA VIRIS
Dominis Colendissimis.

F. STEPHANVS ANGELI VENETVS
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, ac in Prouincia
Veneta Prouincialis Definitor P.P.P.



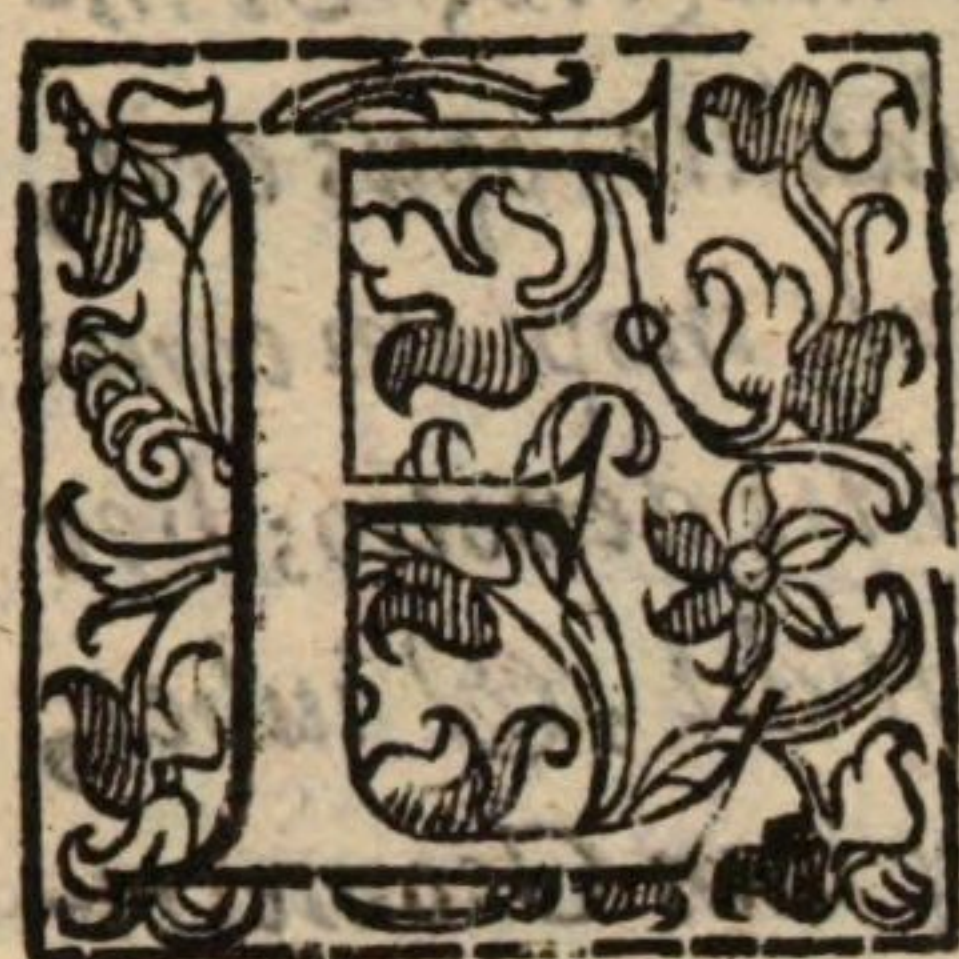
A Virtutis est vis (Illustrissimi et Sapientissimi DD.), ac solertissima indoles, ut animum suauiter imbuat, disciplinisq; veluti temperamento peroptimo, iucundè componat, & instruat. Quod viuere est corpori, id menti præstat scire excellentius; namq; veluti Promethei inanis statua homo degeret, si à scientiarum radio feliciter non excitaretur ad vitam. Id docuit Apollinis lyra, quæ lapidem quondam dulcisona fecit carmina reddentem vitales indidit auras, & voces, cum in reliquis grauitaret inanimis, atq; imè tenderet in centrum. Explicet prosperè plumas Dedalus, iungat humeris alas, se se libret in aera, casus fugiat crudelitatis deludens ingenium; animus verè tunc petit æthera, cum sapientiæ adiumento fulcitur, scientiarumq;

acumine euadit nuperus Phoenix, ut vires sumat ad ter-
tanda sydera. Deniq; volitabit mens incunetanter ubi
studij artificium acceperit, idq; robur mutuabit à scientia,
quod ab Archytæ cura retulit lignea olim columba, cui pennas
fabrefacere ad volatum, opificis sors fuit, & elucubratio
valdè diligens. Ita est; si uiuat corpus, at rude extet in-
genium, minimè dicendum, quod uiuat homo, qui solum ut
intelligat uiuit, opusq; intelligentiæ exercendo ab animan-
tibus ceteris secernitur. Natura gressum dat pedibus ut cir-
cumcursent per orbem; verum, ut mens euebatur, virtus
est, quæ capiti iungit adminicula; ideo Mercurius Scientia-
rum Numen, & Præses, ceruicem, atq; plantas iurè implicat
alis. Ergo si maxima debemus naturæ, cuius ope morituri
uiuimus, potiora scientiæ inscribenda, qua rectè, qua sa-
pienter, qua utiliter, qua decorè, qua perenniter uiuimus.
Illa nos incunabulis, veluti carceri fascijs adstrictos, addicit;
hec perennitati generosè fouet. Illa ab utero in ærumnosam
vitam; hec in gloriæ Capitolium educit. Illa lacte, quo sa-
ginamur infantes, ad corruptionem enutrit; hec nos immor-
talitati parit, ac posthumos seruat. Illa demum parentibus
emancipat, & Patriæ; hec quidquid sumus Lyceis, & præ-
ceptoribus inscribit; indeq; profitetur Achilles, plura debere
Chyroni, qui ab animo ruditatem eliminauit, quam Thety-
di, quæ corpus dedit, Stygijsq; vndis lotum ietibus exposuit
inoffensum. Bononia Gloriosa studiorum Mater, quæ Athe-
narum reparat vetustatem, quæ scientijs gymnasia disertis-
sima aperit, quæ Virtuti sola struit thronum, & domicilium,
quæ postremò Mæcerates parat sapientibus, ad Mathefis me-
accendit Amorem, opportunitatem contulit, Archimede m q;
exhibuit,

exhibuit, Excellentissimum nempe Bonaventuram Cauale-
rium, qui Geometria gloriam perfecit, huiusce preclarissimæ
Vrbis auxit nitorem, Iesuatorum cætum amplissime decora-
uit, ut puriori Geometricarum dulcedinum lacte, luculenter
nutrirer. Hausi, quæ nunquam ad saturitatem degustabo
alimenta. Vestrum Illustrissimi, & Sapientissimi DD.
Urbanitatilissima, quæ Præceptorem Caualerium fouit im-
pensè, iurè se statuit discipulus, quò fidenter deditissima Vo-
bis hæc liber attramenta, quibus claritatem iungere, ut in-
occidua splendeant, vestra Nobilitatis, & laudis, opus erit,
ac facinus præstantissimum. Tenuis munusculi inopiam com-
mendet qua promitur obsequentissima vouentis deuotio; hæc
me vobis valdè spondet deuinctum, hæc consulit, & iubet,
ut tandem, forsàn cum fenore, reddam, quæ iam Geometri-
ca ab hoc Lyceo iucundissimè ebibi rudimenta. Primitiarum
titulis gloriantur hi labores, namq; centrum grauitatis hy-
perbolæ me primò fuisse perscrutatum profiteor. Vos hinc eli-
go Numina, quibus equissimè dicem, Vos operis optimè sta-
tuo Patronos. Ioannes della Faille, qui primus centrum gra-
uitatis partium circuli, & Ellipsis est nactus, voluminis
Verticem Philippi Quarti Hispaniarum Potentissimi Regis,
nomine, & maiestate coronauit. Quò gaudet communi ti-
tulo, hæc opella, eò præclarissimis Viris se nouit fore sacran-
dam. Excipiatis hæc vota, ideo à Vobis omnibus numeris
maximis, cum exigua sint, & penè minima, tuenda. Cete-
rum si Palladis ortum ditauit irriguè pluens aurum, Vos pari-
tèr Sapientissima Vrbis Præsides, quiq; ideò Mineruæ mu-
nus impletis, Astra ditent, ac prosperè tribuant ad gloriam
senescere. Valete.



LECTORI BENEVOLO.



Lapso Mense Iulij exierunt è Typographi manibus quatuor nostri libri circa Infinitas Parabolas versantes. Subiectum equidem vetus, quum de ipso Caualerius antè annum 1640, in problemate vltimo centuriæ suorum problematum; & anno 1647. in exercitationibus geometricis; pertractauerit. Sed circa illud, non modica vel totaliter ab ipso intacta, vel proprijs medijs ostensa, & roborata, manifestauimus. Verum dum tertius illorum sub prælo esset, succurrit modus centra grauitatis hyperbolæ, eiusque partium indagandi, supposita tamen ipsarum quadratura. Ast tunc nostra intererat opus de infinitis parabolis quam primum absoluerè; quapropter & in epistola ad lectorem, & in calce quarti libri polliciti sumus, & argumentum illud, & tractatum de infinitis spirabilibus, sequenti anno, explicare. Incepimus conscribere propositiones ad centrum grauitatis hyperbolæ attinentes; quando tot nouæ cognitiones geometri-

ca occurrerunt, vt nos coegerint (nescimus quo facto) sententiam mutare, impullerintque Miscellaneum praefens citissime edere, opusculum de infinitis spiritalibus ad aliud tempus referuantes. Etenim nescimus an hoc primum futurum sit illorum, quae forsitan elaboraturi sumus. Modò namque phantasia occupat argumentum quodam leuiter ab eximio Torricellio tactum; circa quod, doctrinas tum in Miscellaneo praesenti, tum in opere de infinitis parabolis expositas, insequentes, arbitramur nobis licitum fore futurum explicare quamplurima noua, tam circa mensuram, quam circa centra grauitatis infinitorum solidorum, infinitisque modis variatorum. Accipe ergo, benignè Lector, in praesentiarum Miscellaneum hocce, in quo quas principaliter enucleauimus doctrinas, habes in eius fronte. Porro cupimus admoneri, nos in ipso aliqua indiuisibilium methodo dumtaxat confirmasse. Namque illa omittendo, putabamus, non modicè ingenium tuum labefactare. Haud enim indiuisibilium methodo roboratis assentiri, leuiterque circa regalem illum arguendi modum haesitare, aliud proculdubio non indicat, quam eius vim, & energiam intimè, ac medulitùs minimè percipi. Perlege ergo sequentia si tibi placet, & Vale.

Noi Reformatori dello Studio di Padoa.

HAuendo offeruato per fede del Padre Inquisitore non esserui, nel Libro di Materie Matematiche del Pad. F. Steffano Angeli dell' Ordine de Gesuati, cosa contraria alla Santa Fede, e parimente per attestato del Segretario nostro niente contro Prencipi, è buoni costumi, permettemo, che possi essere stampato, douendo offeruarsi gl'Ordini, & esserne presentate due Copie, vna per la Libreria di Padoa, e l'altra di questa Città &c.

Dat. dal Magistr. nostro li 8. Ottobre 1659.

Nicolò Sagredo Cau. Proc. Ref.

Alemante Angelo Donini Segr.



MISCELLANEVM HYPERBOLICVM, PARABOLICVMQVE.

HÆCVNDITAS trium propo-
tionum initio tertij libri eorum,
quos de infinitis conscripsimus pa-
rabolis, explicatarum, luculenter ex
pronunciatis ijsdem in libris fuit
omnibus patefacta. Hæc autem
elucescet magis, magisque perlustrantibus in præ-
senti libro à nobis aperienda. Centra grauitatis cir-
culi, & Ellipsis, aliquarumque ipsorum partium ad
nostra tempora vsque incognita fuere. Nostro dum-
taxat seculo Ioannes della Failla, Guldinus, alijque
hæc detexere. Hæc & nos manifestauimus in 3. &
4. præcitatis libris, at methodo ab omnibus diuer-
sa. Ast hæc centra inquirerentur frustra nisi circuli
quadratura supponeretur. Semidiameter etenim ad
interceptam inter centrum circuli, & centrum gra-
uitatis sectoris eiusdem eam dicitur habere ratio-
nem, quæ inter partem circumferentiæ, rectamque
A lineam

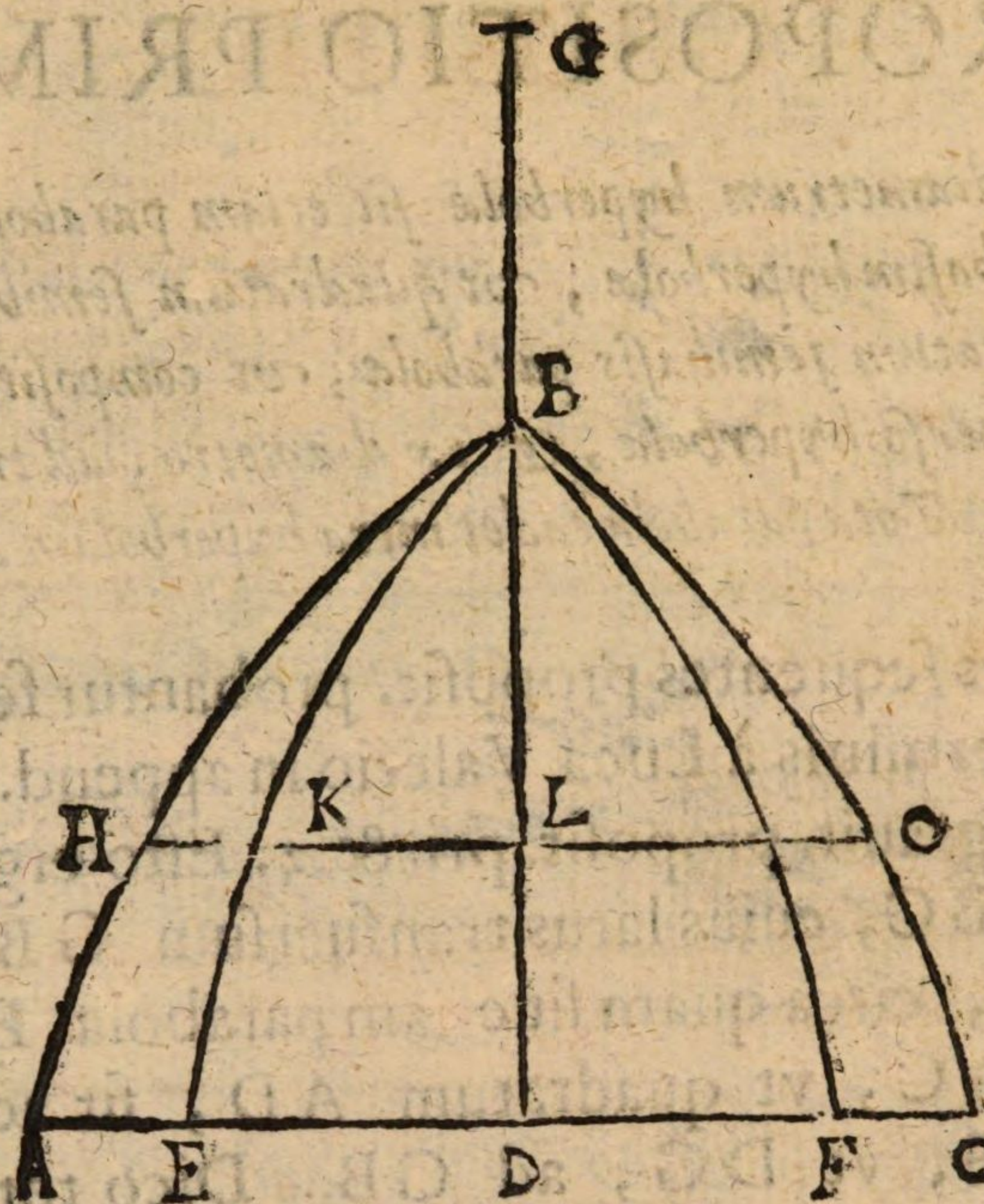
2
lineam cadit. Ratio verò inter rectum, & curvum
exprimenda, semota circuli quadratura, habetur nè
forsitan? Nequaquam. Igitur prædicta centra mi-
nimè reperirentur, nisi circuli quadratura suppose-
retur. Tres in geometria extant insignes figurae,
quarum desideratur quadratura, Circulus, Ellipsis,
ac Hyperbola. Circuli & Ellipsis, ac eorum partium
(supposita talium figurarum quadratura) centra gra-
uitatis reperta fuere; cur non etiam ipsius hyperbo-
lae? Centrum grauitatis hyperbolae sub silentio re-
linquere quotquot de centro grauitatis figurarum
scripsere. Saltem nescimus aliquem de ipso verba
fecisse. Imò Guldinus lib. pri. centrobarycæ in cal-
ce pag. 9. liberè pronunciat. *Deest hoc loco hyperbolæ,
eiusque partium centri grauitatis inuestigatio.* Curabimus
ergo nos, hoc centrum, seu potius hæc centra, ma-
nifestare, at non nisi hyperbolæ supposita quadratu-
ra; in primisque ostendemus in qua linea diametro
parallela sit centrum grauitatis semihyperbolæ. Ast
quoniam hoc inquirimus media ratione, quam ha-
bet cylindrus conoidi hyperbolico circumscriptus,
ad ipsum conoides; licet hanc nos docuerit Archi-
medes lib. de conoid. & sphæroid. proposit. 27. attamen
& nos prius hanc assignabimus pluribus mo-
dis, inter seque diuersis, ac nunquam excogitatis; &
hoc eò libentius, quia data occasione, aliqua noua
geometrica exponemus. Sit ergo.

PROPOSITIO PRIMA.

Si circa diametrum hyperbolæ sit etiam parabola ita diuidens basim hyperbolæ, ut quadratum semibasis, sit ad quadratum semibasis parabolæ, ut composita ex latere transuerso hyperbolæ, & ex diametro, ad transuersum latus. Tota parabola cadet intra hyperbolam.

TRes sequentes proposit. probantur ferè iisdem terminis à Luca Valerio in append. ad lib. 3. de cent. grauit. proposit. pri. & 2. Esto ergo hyperbola ABC , cuius latus transuersum GB , diameter BD , circa quam sit etiam parabola EBF , sic secans AC , ut quadratum AD , sit ad quadratum DE , ut DG , ad GB . Dico totam parabolam EBF , cadere intra hyperbolam. Accipia-
tur arbitrariè punctum L , per quod ducatur ordi-
natim applicata HKL . Quoniam ex proposit. 21.
prim. conic. quadratum HL , est ad quadratum
 AD , ut rectangulum GLB , ad rectangulum
 GDB ; & ex hypothesi, est quadratum AD , ad
quadratum DE , ut DG , ad GB ; nempe sum-
pta communi altitudine DB , ut rectangulum
 GDB , ad rectangulum GBD . Ergo ex æquali,
erit quadratum HL , ad quadratum ED , ut re-
ctangulum GLB , ad rectangulum GBD . Rur-
sum; quoniam in parabola est ex proposit. 20. lib.
cit. quadratum ED , ad quadratum KL , ut DB ,

A 2 ad



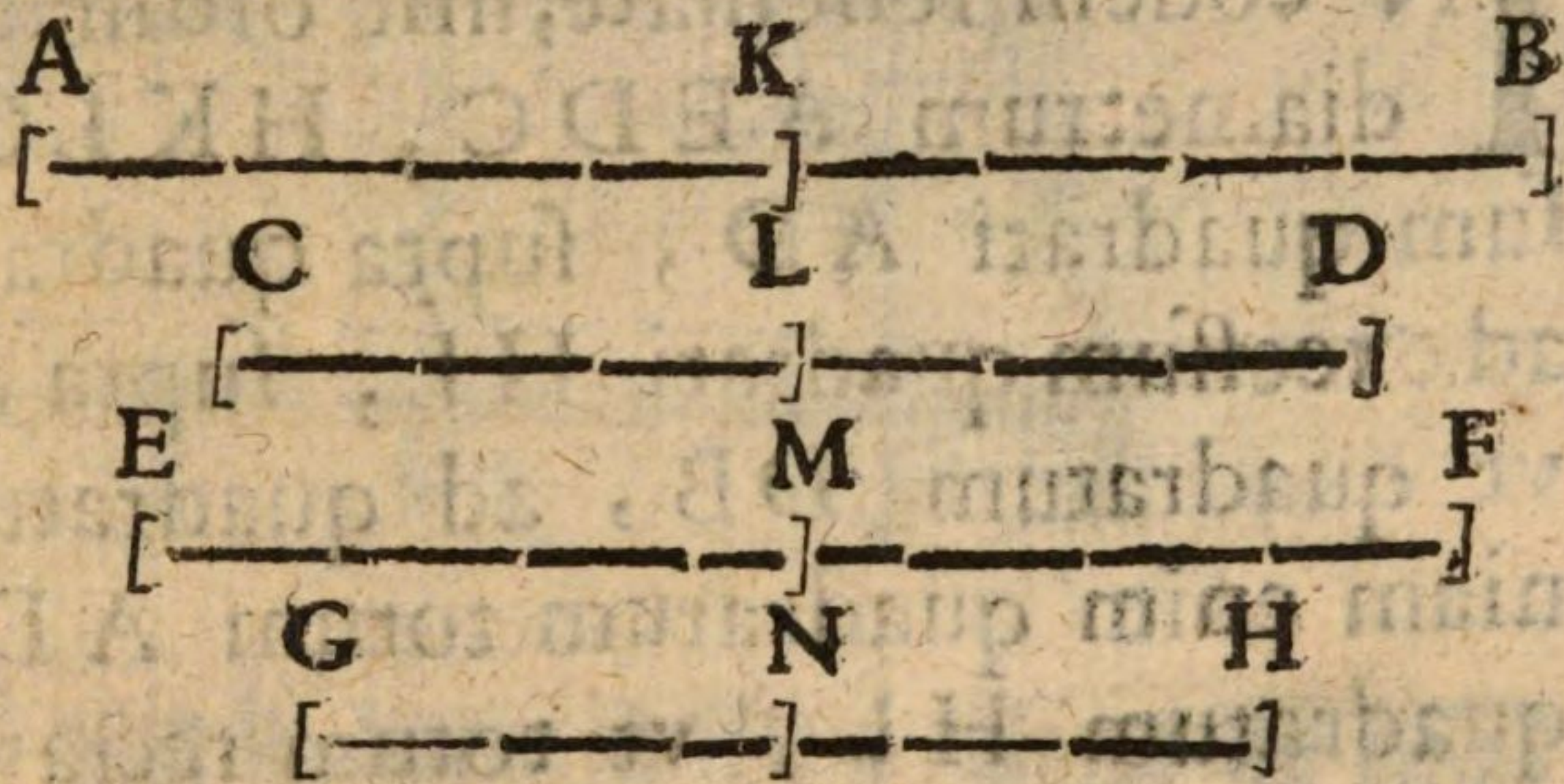
ad BL , nempe sumpta communi altitudine GB ,
 ut rectangulum DBG , ad rectangulum LBG .
 Ergo ex æquali, erit quadratum HL , ad quadra-
 tum KL , ut rectangulum GLB , ad rectangulum
 GBL . At rectangulum GLB , maius est rectan-
 gulo GBL . Ergo etiam quadratum HL , maius
 erit quadrato KL . Sed punctum L , sumptum est
 arbitrariè. Ergo omnes lineæ ordinatim applica-
 tæ in parabola erunt minores singulis ordinatim ap-
 plicatis in hyperbola. Quare patet propositum.

PRO.

PROPOSITIO II.

Si quatuor magnitudinum sit prima, ad secundam, ut tertia, ad quartam; sitque ablata pars primæ ad ablatam partem secundæ, ut ablata pars tertiæ ad ablatam partem quartæ; et sint partes primæ proportionales partibus secundæ. Erit reliqua pars primæ ad reliquam partem secundæ, ut reliqua pars tertiæ ad reliquam partem quartæ.

SIT ut prima
A B, ad se-
cundam C D, sic
tertia E F, ad
quartam G H;
sitque k B, ad
L D, ut M F, ad



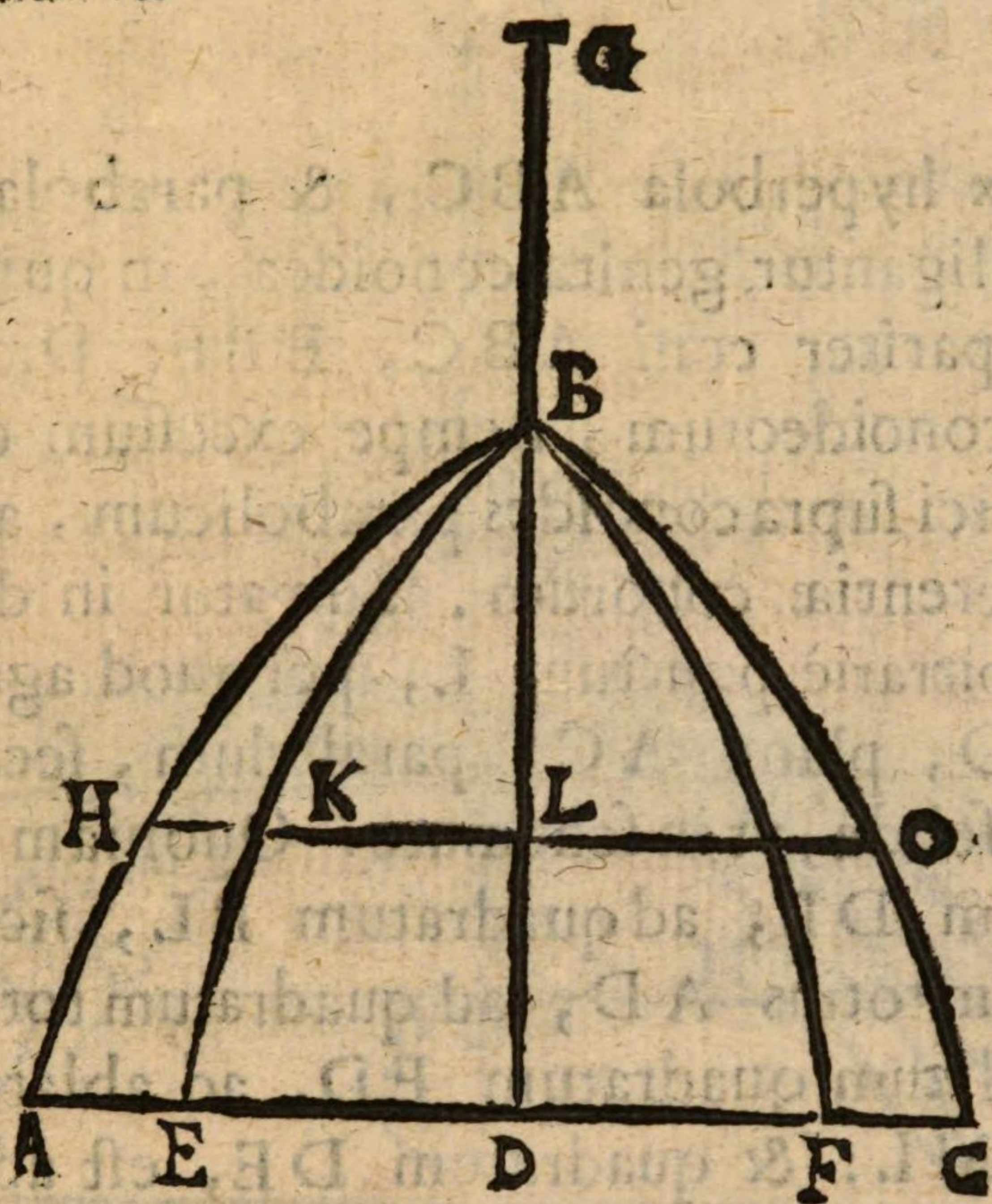
NH: pariter sit ut A k, ad k B, sic E M, ad M F.
Dico etiam A K, esse ad C L, ut E M, ad G N.
Quoniam ex hypothesi componendo, est A B, ad
B k, ut E F, ad F M; & ut k B, ad L D, sic M F,
ad N H; ergo ex æquali, ut A B, ad L D, sic E F,
ad N H. At pariter est ut A B, ad totam C D, sic
E F, ad totam G H. Ergo & A B, erit ad reliquam
C L, ut E F, ad reliquam G N. Rursum, quoniam
conuertendo, est B K, ad k A, ut F M, ad M E.
Ergo componendo, & conuertendo, erit A k, ad A B,
ut E M, ad E F. Erat autem ut A B, ad C L, sic E F, ad
G N.

⁶
GN. Ergo ex æquali, erit Ak, ad CL, ut EM, ad
GN. Quod &c.

PROPOSITIO III.

*Factis hysdem quæ in prima proposit. excessus quadratorum
ordinatim applicatarum in hyperbola supra quadrata or-
dinatim applicatarum in parabola, erunt ad inuicem, ut
quadrata partium diametri interceptarum inter ipsas, &
verticem figurarum.*

IN eodem schemate, sint ordinatim applicatæ ad
diametrum AEDC, HKLO. Dico exces-
sum quadrati AD, supra quadratum ED, esse
ad excessum quadrati HL, supra quadratum kL,
ut quadratum DB, ad quadratum BL. Quo-
niam enim quadratum totum AD, est ad totum
quadratum HL, ut totum rectangulum GDB,
ad totum rectangulum GLB: & ablatum quadra-
tum ED, probatum est esse ad ablatum quadra-
tum KL, ut ablatum rectangulum DBG, ad
ablatum rectangulum LBG: estque ablatum qua-
dratum DE, ad reliquum rectangulum AEC,
ut ablatum quadratum Lk, ad ablatum rectangu-
lum HkO (quia cum ex hypothefi, sit quadratum
AD, ad quadratum DE, ut DG, ad GB;
nempe ut rectangulum GDB, ad rectangulum
GBD; erit diuidendo, & conuertendo, quadra-
tum DE, ad rectangulum AEC, ut rectangu-
lum



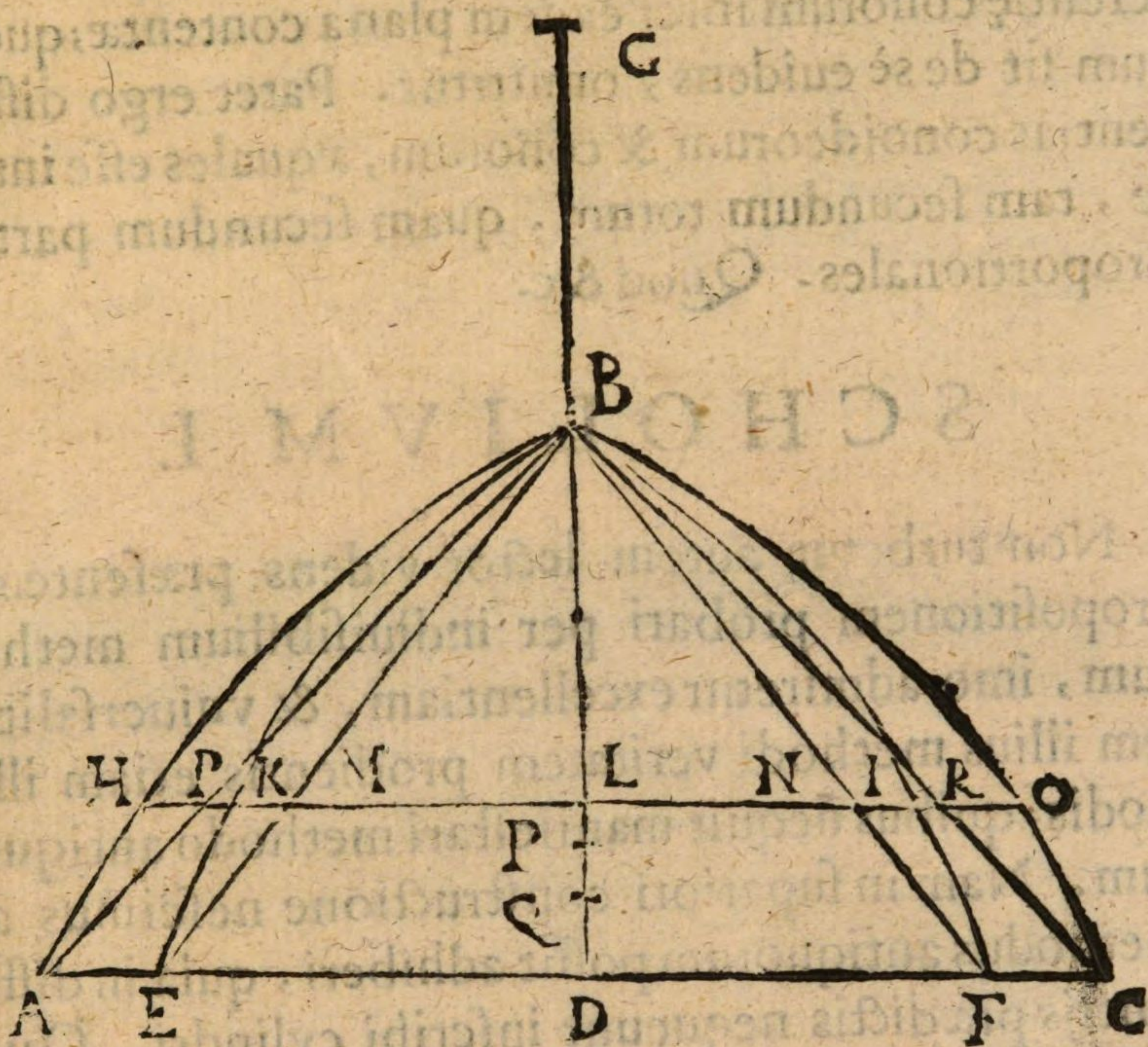
lum GBD , ad quadratum BD). Ergo ex pro-
posit. anteced. erit & ut reliquum rectangulum
 AEC , ad reliquum rectangulum HkO , ut reli-
quum quadratum DB , ad reliquum quadratum
 BL . Quod &c.

PROPOSITIO IV.

*Si ex figuris antecedentium propositionum intelligantur ge-
nerari conoidea, in quibus inscribentur coni super ijs-
dem basibus, & circa eandem diametrum. Differen-
tia conoideorum tam secundum totum, quam secundum
partes*

partes proportionales, erit æqualis differentia conorum.

Sed ex hyperbola ABC , & parabola EBF , intelligentur genita conoidea, in quibus sint inscripti pariter coni ABC , EBF . Dico differentiam conoideorum, nempe excessum conoidis hyperbolici supra conoides parabolicum, æqualem fore differentia conorum. Sumatur in diametro BD , arbitrariè punctum L , per quod agatur planum HO , plano AC , parallelum, secans omnia dicta solida, ut in schemate. Quoniam enim ut quadratum DB , ad quadratum BL , sic est tam quadratum totius AD , ad quadratum totius PL , quam ablatum quadratum ED , ad ablatum quadratum ML : & quadratum DE , est ad rectangulum AEC , ut quadratum LM , ad rectangulum PMR (quia proportionales horum quadratorum ad hæc rectangula componuntur ex iisdem proportionibus, ut facile quilibet modicè in geometria expertus potest agnoscere). Ergo ex propof. 2. erit ut quadratum DB , ad quadratum BL , sic rectangulum AEC , ad rectangulum PMR . Sed etiam ex propofit. antec. est ut quadratum DB , ad quadratum BL , sic rectangulum AEC , ad rectangulum HkO . Ergo ut rectangulum AEC , ad rectangulum PMR , sic idem rectangulum AEC , ad rectangulum HkO . Ergo rectangulum PMR , erit æquale rectangulo HkO . Quare etiam armilla
circu-



Circularis PMR , erit æqualis armillæ circulari HkO . Cum verò punctum L , sumptum sit arbitrariè, sequitur omnes armillas differentiæ conorum, æquales esse omnibus armillis differentiæ conoideorum. Ergo & differentia conorum erit æqualis differentiæ conoideorum.

Sicuti autem probatum est totas illas differentias æquales esse, sic probari potest quaslibet ipsarum partes proportionales item fore æquales. v. g. si intelligatur ductum planum HO , probari potest eodem modo, partem differentiæ conoideorum con-

B tentam

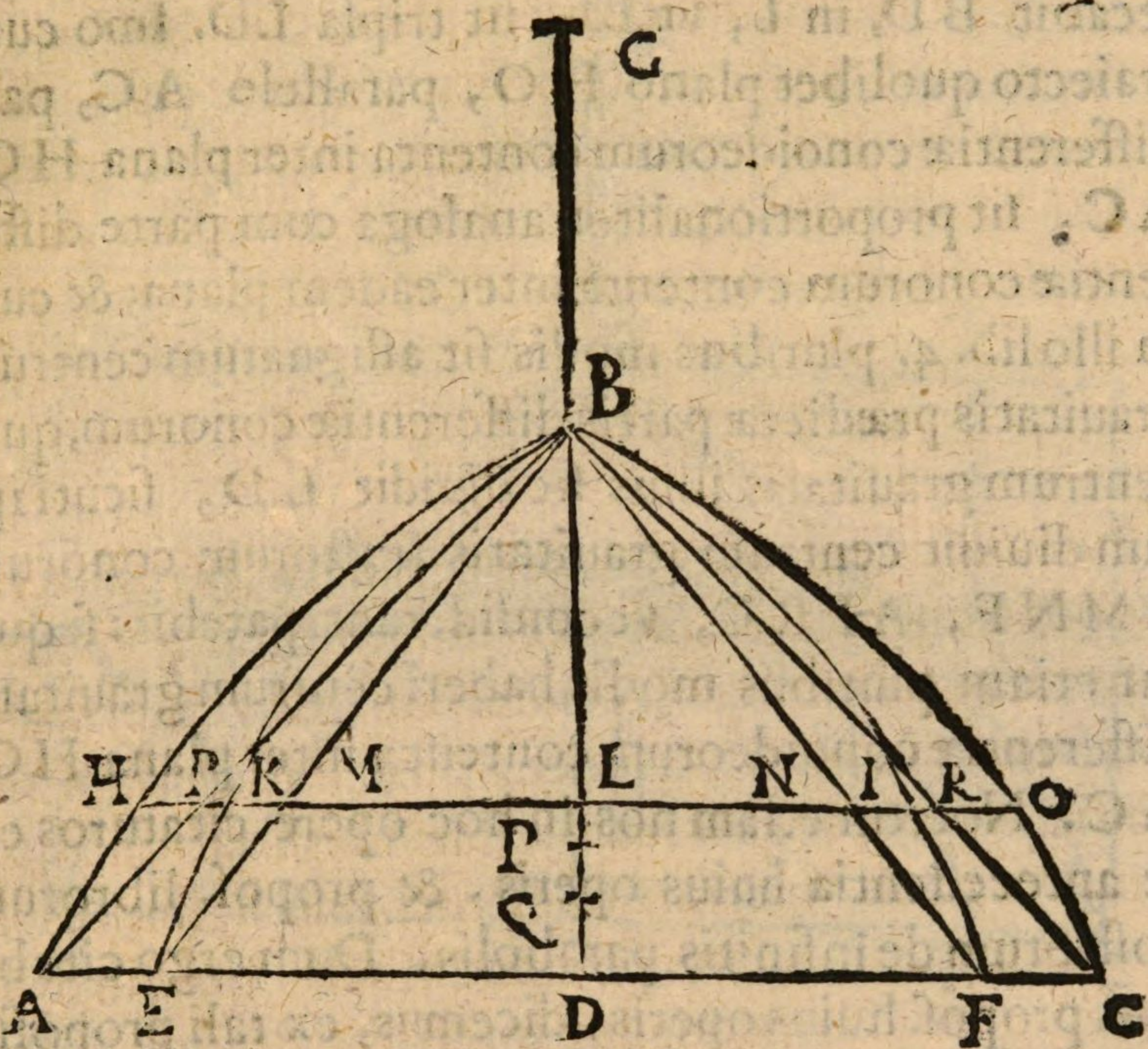
10
tentam inter plana HO, AC, æqualem esse parti differentię conorum inter eadem plana contentæ; quod cum sit de se evidens, omittitur. Patet ergo differentias conoideorum & conorum, æquales esse inter se, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Non turbetur autem lector videns præsentem propositionem probari per indivisibilibus methodum, imo admiretur excellentiam, & vniuersalitatem illius methodi veritatem prodientis etiam illis modis, quibus nequit manifestari methodo antiquorum. Nam in superiori constructione nescimus an methodus antiquorum possit adhiberi, quia in differentijs prædictis nequeunt inscribi cylindri. Quid ergo? Conclusio demonstrata falsa erit, quia per indivisibilia fuit roborata? Nequaquam. Nam etiam eadem conclusio probari potest methodo antiquorum, sed alia præparatione adhibita, vt patebit suo loco.

SCHOLIVM II.

Sed antequam nos expediamus à præsentī propositione, opere pretium ducimus manifestare eas notitias, quas ex ipsa, & ex dictis in nostro lib. 4. de infinitis parabolis possumus eruere. Cum enim excessus



cessus sæpe dicti sint æquales inter se tam secundum
 totum, quam secundum partes proportionales, se-
 quitur consequenter iuxta doctrinam præcit. 4. lib.
 esse quantitates proportionaliter analogas tam se-
 cundum magnitudinem, quam secundum grauita-
 tem. Quare ex proposit. 13. eiusdem libri, centra
 grauitatis horum excessuum secabunt BD , eodem
 pacto. Cum ergo centrum grauitatis differentiarum co-
 norum, quod sit v. g. L , sic secet BD , ut BL , sit
 tripla LD (nam idem est centrum grauitatis ex-
 cessus prædicti, & conorum ABC , EBF). Ergo

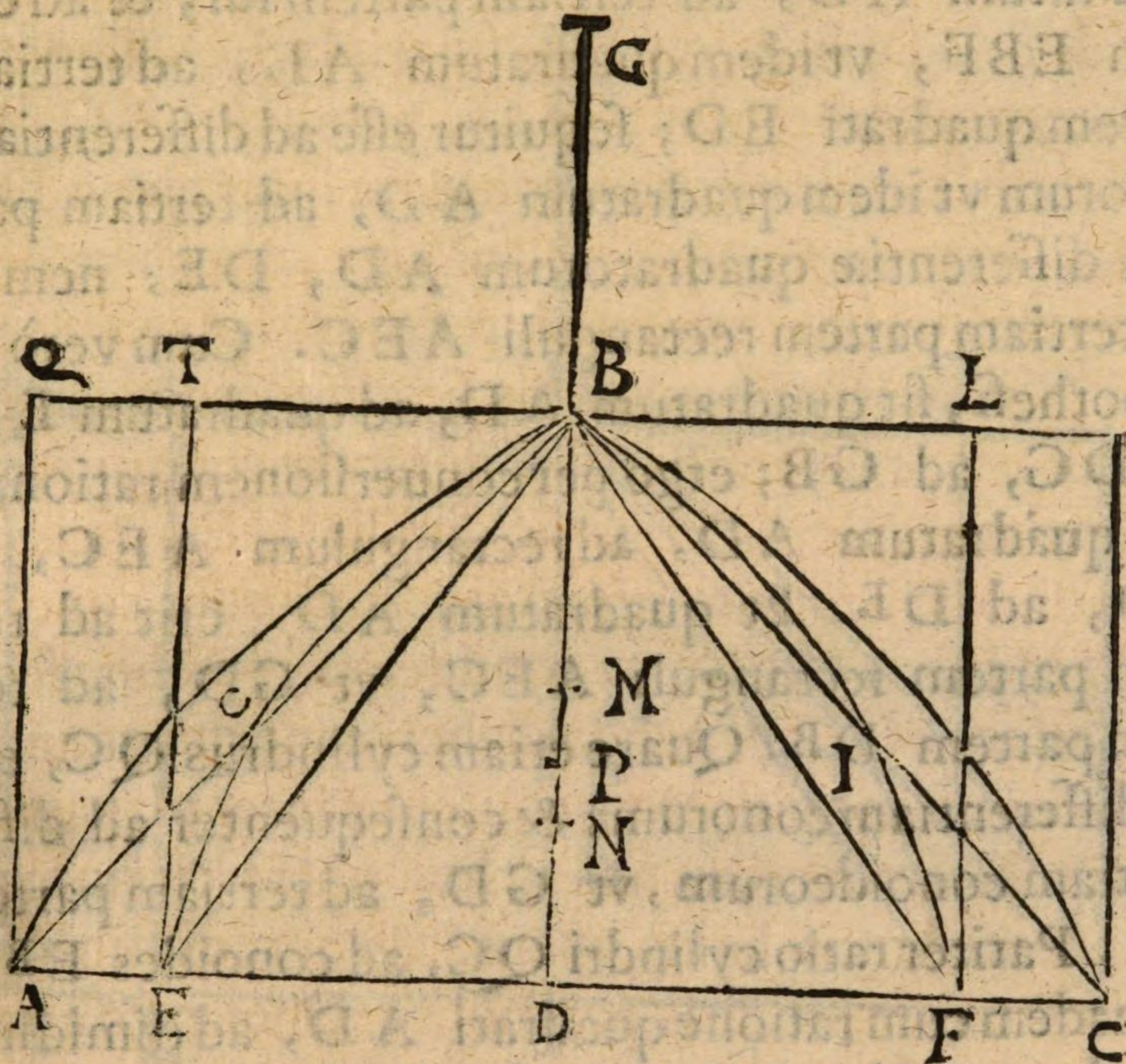
B 2 etiam

etiam centrum grauitatis differentiæ conoideorum sic secabit BD , in L , vt BL , sit tripla LD . Imo cum traiecto quolibet plano HO , parallelo AC , pars differentiæ conoideorum contenta inter plana HO , AC , sit proportionaliter analoga cum parte differentiæ conorum contenta inter eadem plana; & cum in illo lib. 4. pluribus modis sit assignatum centrum grauitatis prædictæ partis differentiæ conorum, quia centrum grauitatis illius sic diuidit LD , sicuti ipsam diuidit centrum grauitatis frustorum conorum $EMNF$, $APRC$, vt consideranti patebit: sequitur etiam pluribus modis haberi centrum grauitatis differentiæ conoideorum contentæ inter plana HO , AC . Notetur etiam nos in hoc opere citatueros esse antecedentia huius operis, & propos. librorum nostrorum de infinitis parabolis. Dum ergo citabimus propos. huius operis, dicemus, ex tali proposit. vel ex schol. talis proposit. Dum vero citabimus libros de infinitis parabolis, dicemus ex prop. tali libri talis. v. g. ex propof. 4. lib. 3. intelligendo semper nostri operis.

PROPOSITIO V.

Cylindrus circumscriptus conoidi hyperbolico est ad ipsum, vt composita ex axi, seu diametro, & ex latere transuerso conoidis, ad dimidium lateris transuersi, una cum tertia parte axis, seu diametri.

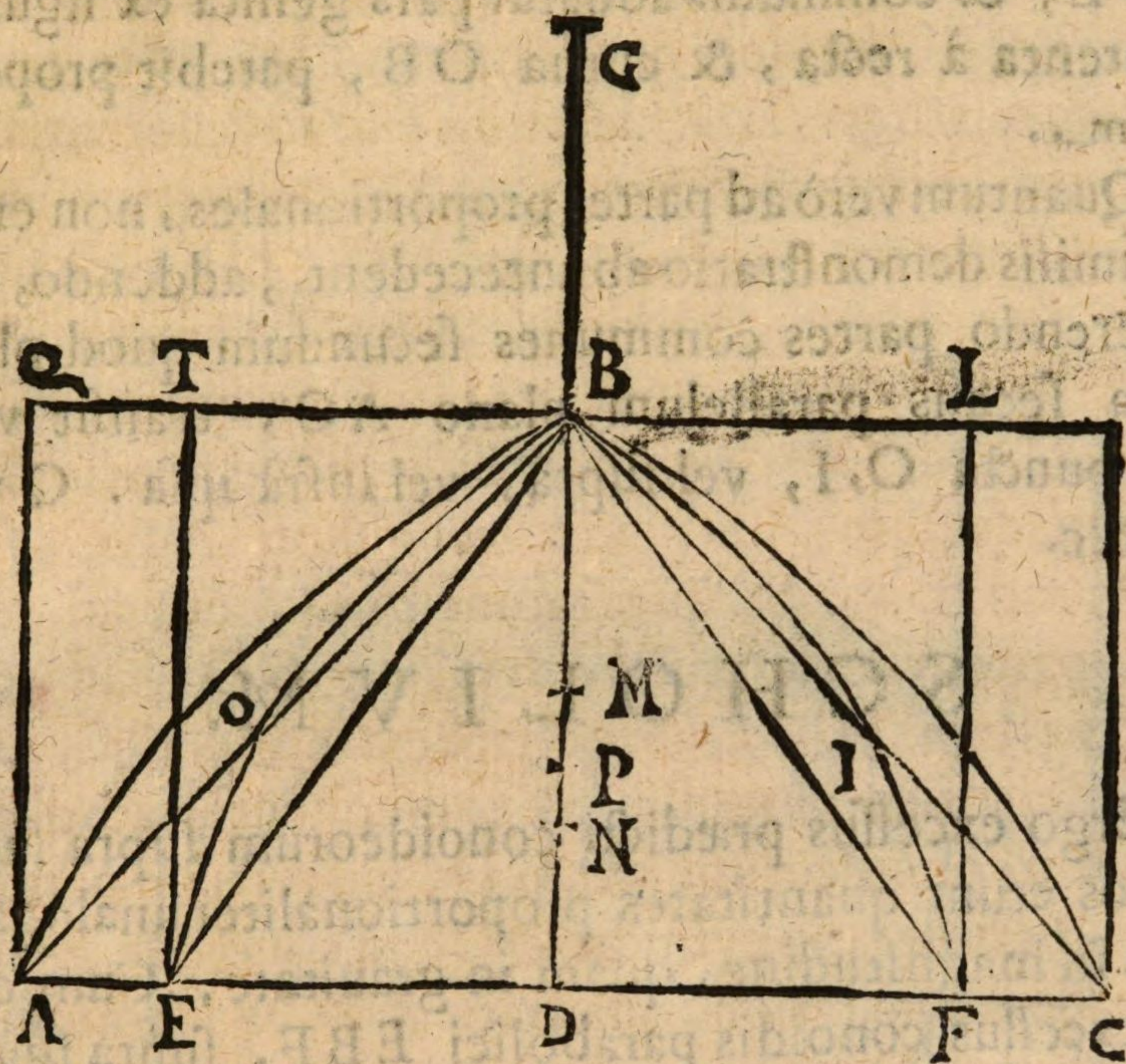
Intel-



Intelligentur omnia solida antecedentis propositi. & ipsis conoidibus sint circumscripti cylindri QC , TF . Quoniam conoides hyperbolicum constat ex differentia conoideorum, & ex conoide parabolico; & differentia conoideorum est æqualis differentia conorum; ergo ratio cylindri QC , ad conoides ABC , erit eadem cum ratione eiusdem cylindri ad differentiam conorum, & ad conoides parabolico EBF . At ratio cylindri QC , ad differentiam conorum est eadem cum ratione quadrati AD , ad tertiam partem rectanguli AEC , ut consideranti patebit; quia cum sit ad conum ABC , ut qua-

quadratum AD , ad tertiam partem sui; & ad conum EBF , ut idem quadratum AD , ad tertiam partem quadrati ED ; sequitur esse ad differentiam conorum ut idem quadratum AD , ad tertiam partem differentiae quadratorum AD , DE ; nempe ad tertiam partem rectanguli AEC . Cum verò ex hypothesi, sit quadratum AD , ad quadratum ED , ut DG , ad GB ; ergo per conuersionem rationis, erit quadratum AD , ad rectangulum AEC , ut GD , ad DB . Et quadratum AD , erit ad tertiam partem rectanguli AEC , ut GD , ad tertiam partem DB . Quare etiam cylindrus QC , erit ad differentiam conorum, & consequenter ad differentiam conoideorum, ut GD , ad tertiam partem DB . Pariter ratio cylindri QC , ad conoides EBF , est eadem cum ratione quadrati AD , ad dimidium quadrati ED . Quia cum sit ad cylindrum TF , ut quadratum AD , ad quadratum ED ; & cum conoides EBF , sit dimidium cylindri TF , ut saepe probatum est in nostris lib. de infinit. parab. Ergo cylindrus QC , erit ad conoides EBF , ut quadratum AD , ad dimidium quadrati ED ; nempe ex hypothesi, ut DG , ad dimidiam GB . Ergo colligendo consequentia, erit cylindrus QC , ad conoides, & ad differentiam conoideorum, nempe ad conoides hyperbolicum ABC , ut GD , ad dimidiam GB , cum tertia parte BD . Quod erat ostendendum.

PRO-



PROPOSITIO VI.

In solidis saepe dictis, excessus conoidis hyperbolici supra conum sibi inscriptum est aequalis excessui conoidis parabolici illi inscripti supra conum illi inscriptum, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales.

Q Vantum ad totos excessus sic patebit. Cum enim ex proposit. 4. excessus conoideorum sit aequalis excessui conorum, si communis auferatur illa pars, quæ generatur ex reuolutione trilinei mixti AOE,

AOE , & communis addatur pars genita ex figura contenta à recta, & curva OB , patebit propositum.

Quantum verò ad partes proportionales, non erit dissimilis demonstratio ab antecedenti, addendo, & auferendo partes communes secundum quod planum secans parallelum plano AC , transit vel per puncta O, I , vel suprà, vel infrà ipsa. Quare &c.

SCHOLIUM.

Ergo excessus prædicti conoideorum supra suos conos erunt quantitates proportionaliter analogæ, tam in magnitudine, quam in grauitate. Cum ergo excessus conoidis parabolici EBF , supra suum conum sit dimidium talis coni, quia conoides est sesquialterum coni. Ergo etiam excessus conoidis hyperbolici ABC , supra suum conum erit dimidium coni inscripti in conoide EBF . Quare cylindrus QC , qui est ad conum inscriptum in conoide parabolico, ut quadratum AD , ad tertiam partem quadrati ED , erit ad excessum conoidis ABC , supra conum ABC , ut idem quadratum AD , ad sextam partem quadrati DE . Quod notetur.

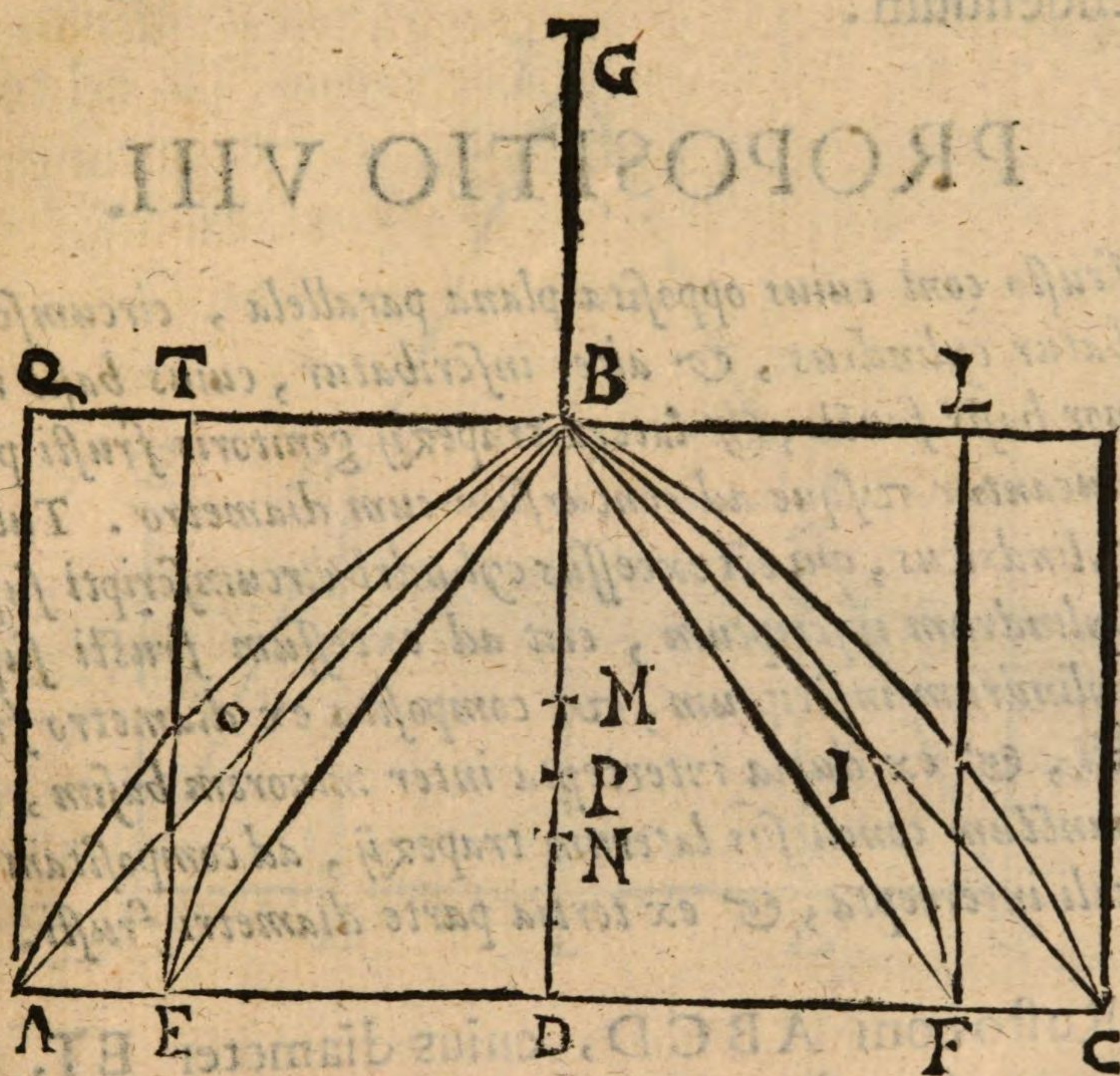
Item, quoniam excessus prædicti sunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate. Ergo idem punctum in BD , erit centrum grauitatis cuiuslibet talium excessuum. Cum ergo punctum me-
dium

BD, est 12, talium PN, erit 1. Cum verò si fiat
 ut excessus conoidis supra conum ad conum, nem-
 pe ut 1, ad 2, sic reciprocè NP, ad PM, sit M,
 centrum gravitatis excessus prædicti. Sequitur qua-
 lium BD, erat 12, PN, 1, & BP, 8, talium PM,
 esse 2, & BM, 6. Quare patet propositum.

PROPOSITIO VII.

*Cylindrus circumscriptus conoidi hyperbolico est ad ipsum,
 ut composita ex axi, seu diametro, & ex latere tran-
 sverso conoidis, ad dimidium lateris transversi, una
 cum tertia parte axis, seu diametri.*

Propositio ergo quinta probatur alio modo. Sint
 solida prædicta, &c. Dico cylindrum QC, ef-
 se ad conoides hyperbolicum ABC, ut GD, ad
 dimidiam GB, cum tertia parte DB. Cum enim
 conoides ABC, diuidatur in conum ABC, & in
 excessum ipsius supra ipsum; sequitur QC, cylin-
 drum esse ad conoides ABC, ut est etiam ad co-
 num ABC, & ad excessum conoidis supra conum.
 Cylindrus QC, est ad conum ABC, ut quadra-
 tum AD, ad sui tertiam partem: & ex schol. ant.
 est ad excessum conoidis ABC, supra suum co-
 num ut quadratum AD, ad sextam partem quadra-
 ti DE. Ergo colligendo ambo consequentia, erit
 QC, ad conum, & ad excessum, nempe ad conoides
 ABC, ut quadratum AD, ad sui tertiam partem,
 una



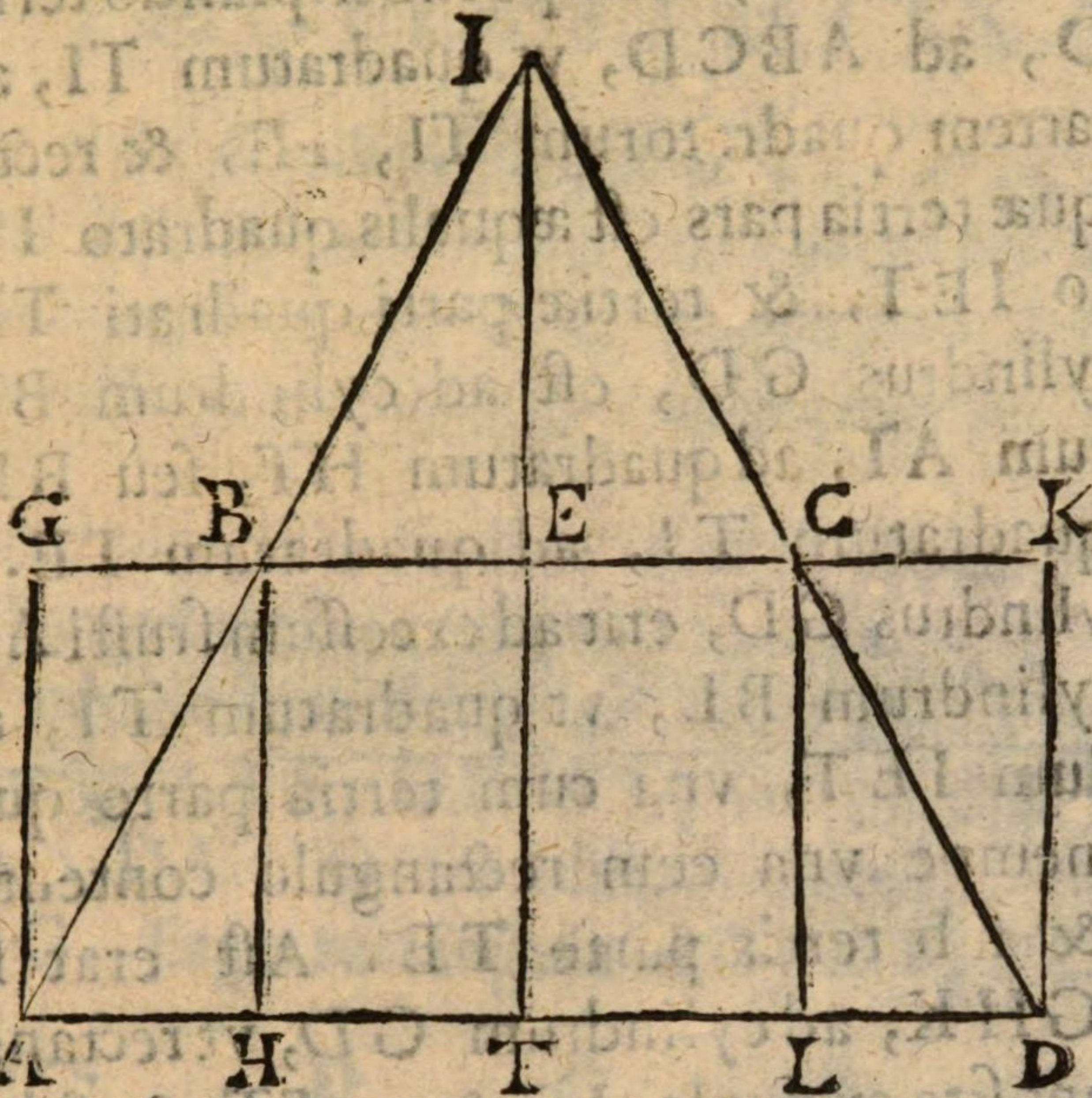
vna cum sexta parte quadrati ED . Cum autem ex
 hypothesi, sit vt quadratum AD , ad quadratum
 DE , sic DG , ad GB ; erit & vt quadratum AD ,
 ad sui tertiam partem, cum sexta parte quadrati ED ,
 sic GD , ad sui tertiam partem cum sexta parte
 GB . Ergo etiam cylindrus QC , erit ad conoides
 ABC , vt DG , ad sui tertiam partem (nempe ad
 tertiam partem ipsarum GB , BD) vna cum sexta
 parte GB . At tertia pars GB , vna cum sexta par-
 te eiusdem facit dimidiam GB . Ergo QC , erit
 ad conoides hyperbolicum ABC , vt GD , ad
 C 2 dimi-

20
dimidiam GB , cum tertia parte BD . Quod erat
ostendendum.

PROPOSITIO VIII.

*Si frusto conī cuius opposita plana parallela, circumscri-
batur cylindrus, & alter inscribatur, cuius basis mi-
nor basis frusti, & latera trapezij genitoris frusti pro-
ducantur usque ad concursum cum diametro. Tubus
cylindricus, qui est excessus cylindri circumscripti supra
cylindrum inscriptum, erit ad excessum frusti supra
cylindrum inscriptum, ut composita ex diametro fru-
sti, & ex dupla intercepta inter minorem basim, &
punctum concursus laterum trapezij, ad compositam ex
tali intercepta, & ex tertia parte diametri frusti.*

FRUSTO conī $ABCD$, cuius diameter ET , &
opposita plana parallela ad inuicem sint BC ,
 AD , circumscribatur cylindrus GD , & inscri-
batur HC ; & latera AB , DC , producantur us-
que dum occurrant TE , productæ in I . Dico tu-
bum cylindricum $GHCD$, esse ad excessum frusti
 $ABCD$, supra cylindrum BL , nempe ad solidum
genitum ex triangulo ABH , reuoluto circa ET ,
ut composita ex TE , & ex dupla IE , ad IE , una
cum tertia parte TE . Cum enim cylindrus GD ,
sit ad cylindrum BL , ut quadratum AT , ad qua-
dratum TH , seu BE ; nempe ut quadratum TI ,
ad quadratum IE . Ergo & per conuersione ratio-
nis,



nis, erit GD , ad tubum $GHCD$, vt quadratum
 IT , ad excessum ipsius supra quadratum IE ; nem-
 pe ad duplum rectangulum $IE T$, cum quadrato
 TE ; nempe ad rectangulum sub composita ex dupla
 IE , & ET , & sub ET . Quare & conuertendo,
 erit tubus $G H K$, ad GD , vt prædictum rectan-
 gulum ad quadratum IT . Cylindrus GD , est ex
 dictis in schol. 2. proposit. 15. lib. 2. ad frustum
 $ABCD$, vt tripla TI , ad TI , IE , & harum ter-
 tiam minorem proportionalem; nempe ducendo has
 in IT , vt triplum quadratum IT , ad quadratum
 IT , rectangulum $TI E$, & rectangulum sub TI , &
 sub

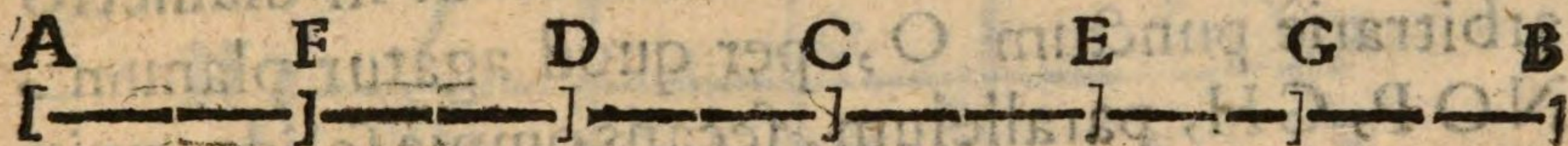
sub tertia proportionali (quod rectangulum est æ-
quale quadrato IE): nempe subtriplando terminos,
est GD , ad $ABCD$, vt quadratum TI , ad ter-
tiam partem quadratorum TI , IE , & rectanguli
 TE , quæ tertia pars est æqualis quadrato IE , re-
ctangulo $IE T$, & tertiæ parti quadrati TE . At
idem cylindrus GD , est ad cylindrum BL , vt
quadratum AT , ad quadratum HT , seu BE ; hoc
est vt quadratum TI , ad quadratum IE . Ergo
idem cylindrus GD , erit ad excessum frusti $ABCD$,
supra cylindrum BL , vt quadratum TI , ad re-
ctangulum $IE T$, vna cum tertia parte quadrati
 TE ; nempe vna cum rectangulo contento sub
 TE , & sub tertia parte TE . At erat supra
tubus GHK , ad cylindrum GD , vt rectangulum
sub composita ex dupla IE , & ex ET , & sub TE ,
ad quadratum IT . Ergo ex æquali, erit tubus Ghk ,
ad excessum frusti $ABCD$, supra cylindrum BL ,
vt prædictum rectangulum, ad rectangulum $IE T$,
vna cum rectangulo sub TE , & sub tertia parte ET .
Quæ duo rectangula cum sint idem ac rectangulum
sub composita ex IE , & ex tertia parte ET , & sub
 TE . Sequitur Ghk , esse ad excessum prædictum,
vt rectangulum sub composita ex dupla IE , & ex
 ET , & sub ET , ad rectangulum sub eadem ET ,
& sub composita ex IE , & ex tertia parte ET ; nem-
pe propter communelatus ET , vt composita ex du-
pla IE , & ex ET , ad IE , cum tertia parte ET .
Quod erat ostendendum.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Si recta AB, sit secta bifariam in C, & in D, E, æque remotè à C, & pariter in F, G, æque remotè à C; sitque rectangulum AFB, æquale quadrato DC. Erit etiam rectangulum ADB, æquale quadrato FC.

CUm enim rectangulum AFB, diuidatur in rectangulum sub AF, in DB, & in rectangulum AFD, nempe in rectangulum sub FD, in GB. Ergo rectangula AF, DB; FD, GB, erunt æqualia quadrato DC. Quare addito communi rectangulo FDG. Ergo rectangula AF, DB; FD, GB;



FDG, erunt æqualia quadrato DC, & rectangulo FDG; nempe quadrato FC. At rectangula FDG, & FD, GB, faciunt rectangulum FDB. Quod cum rectangulo AF, DB, facit rectangulum ADB. Quare etiam rectangulum ADB, erit æquale quadrato FC. Quod &c.

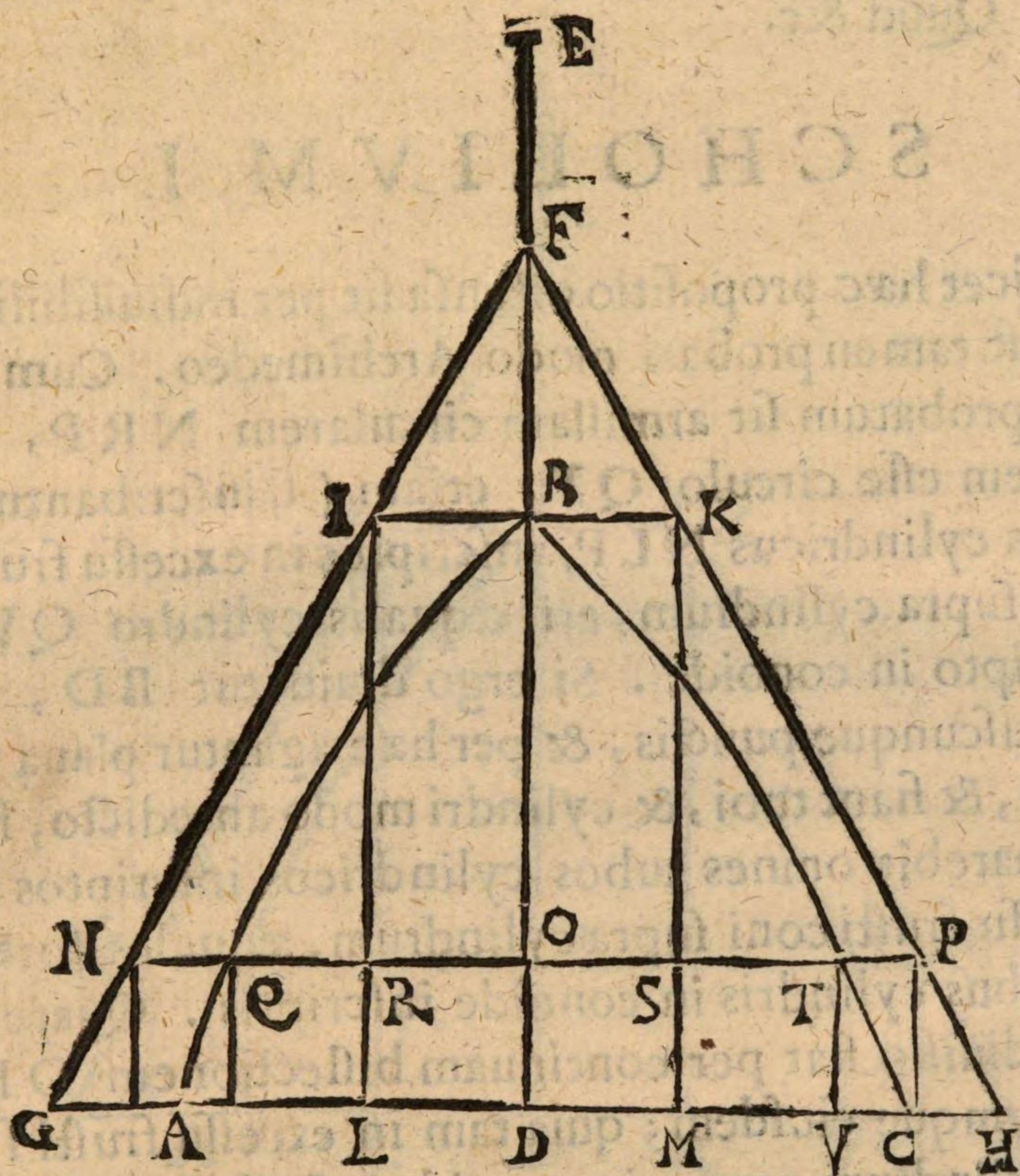
PROPOSITIO X.

Si conoides hyperbolicum includatur intra frustum conicum habens oppositas bases parallelas, & latera trapezj genitoris frusti sint partes asymptoton hyperbolæ genitricis

conoi-

conoidis; intraque frustum conicum, & supra minori basi ipsius inscribatur cylindrus. Erit excessus frusti conici supra cylindrum sibi inscriptum æqualis conoidi hyperbolico, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales.

COnoides hyperbolicum ABC , cuius diameter DB , latus transuersum EB , centrum F , asymptoti hyperbolæ genitricis FG , FH , intelligatur inclusum intra frustum conicum $GIKH$, cuius opposita plana parallela sint Ik , GH , & in ipso sit inscriptus cylindrus IM . Dico excessum frusti $GIkH$, supra cylindrum IM , æqualem esse conoidi ABC , tam secundum totum, quam secundum partes proportionales. Sumatur enim in diametro arbitrariè punctum O , per quod agatur planum NOP , GH , parallelum, secans omnia solida, ut in schemate. Quoniam enim quadratum NO , est æquale tam rectangulo NQP , cum quadrato QO , quam rectangulo $NR P$, cum quadrato RO . Ergo rectangulum NQP , cum quadrato QO , erit æquale rectangulo $NR P$, cum quadrato RO . At ex 2. conic. proposit. 10. rectangulum NQP , est æquale quadrato IB , seu quadrato RO . Ergo reliquum rectangulum $NR P$, erit æquale quadrato QO . Quare etiam armilla circularis $NR P$, erit æqualis circulo QT . Punctum autem O , sumptum est arbitrariè; ergo omnes Armillæ genitæ ex reuolutione trianguli GIL , circa BD , erunt æquales
omni-



omnibus circulis conoidis ABC , AC , parallelis.
 Ergo & solidum genitum ex triangulo, nempe ex-
 cessus frusti GKH , supra cylindrum IM , erit
 æqualis ipsi conoidi ABC . Quod verò ostensum
 est de totis istis solidis, probaretur etiam de partibus
 proportionalibus; quia eodem modo probaretur v.
 g. partem excessus contentam inter plana NP ,
 GH , æqualem esse frusto hyperbolico $AQTC$.
 Quare patet prædicta solida æqualia esse tam secun-
 dum

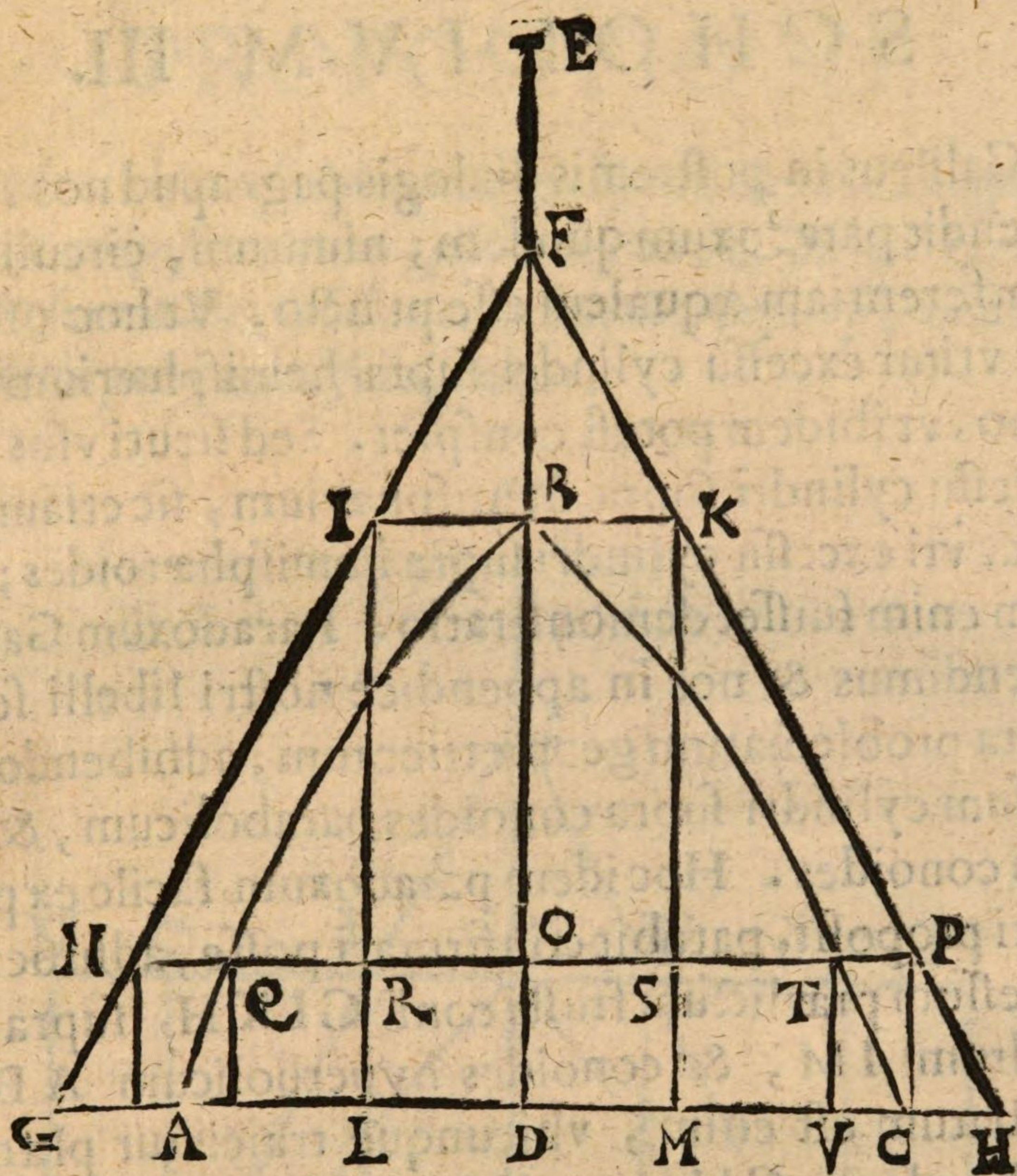
dam totum, quam secundum partes proportionales. Quod &c.

SCHOLIUM I.

Licet hæc propositio ostensa sit per indiuisibilia, potest tamen probari modo Archimedeo. Cum enim probatum sit armillam circularem $NR P$, æqualem esse circulo QT , etiam (si inscribantur) tubus cylindricus NLP , inscriptus in excessu frusti conici supra cylindrum, erit æqualis cylindro QV , inscripto in conoide. Si ergo diuidatur BD , in quibuscunque punctis, & per hæc agantur plana ut supra, & fiant tubi, & cylindri modo antedicto, facile patebit omnes tubos cylindricos inscriptos in excessu frusti conici supra cylindrum, æquales fore omnibus cylindris in conoide inscriptis. Quare si hæc diuisio fiat per continuam bisectionem DB , partiumque eiusdem; quia tam in excessu frusti supra cylindrum, quam in conoide inscribemus solida ab ipsis deficientibus defectu minori quacunque data magnitudine; tandem concludemus excessum prædictum, & conoides esse magnitudines æquales. Hæc autem viris Euclideis, Archimedeisque sunt nimis obuia.

SCHOLIUM II.

Potest ergo consequenter ad superius sæpe dicta,
deduci



deduci ex his, excessum prædictum, & conoides hyperbolicum, esse quantitates proportionaliter analogas tam in magnitudine, quam in gravitate, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales. Vnde si aliquo pacto inuenietur centrum gravitatis, vel totius excessus prædicti, vel partis eius in **BD**; idem erit centrum gravitatis conoidis hyperbolici **ABC**, vel segmenti eiusdem, &c. Idem intelligatur è contra.

D

2

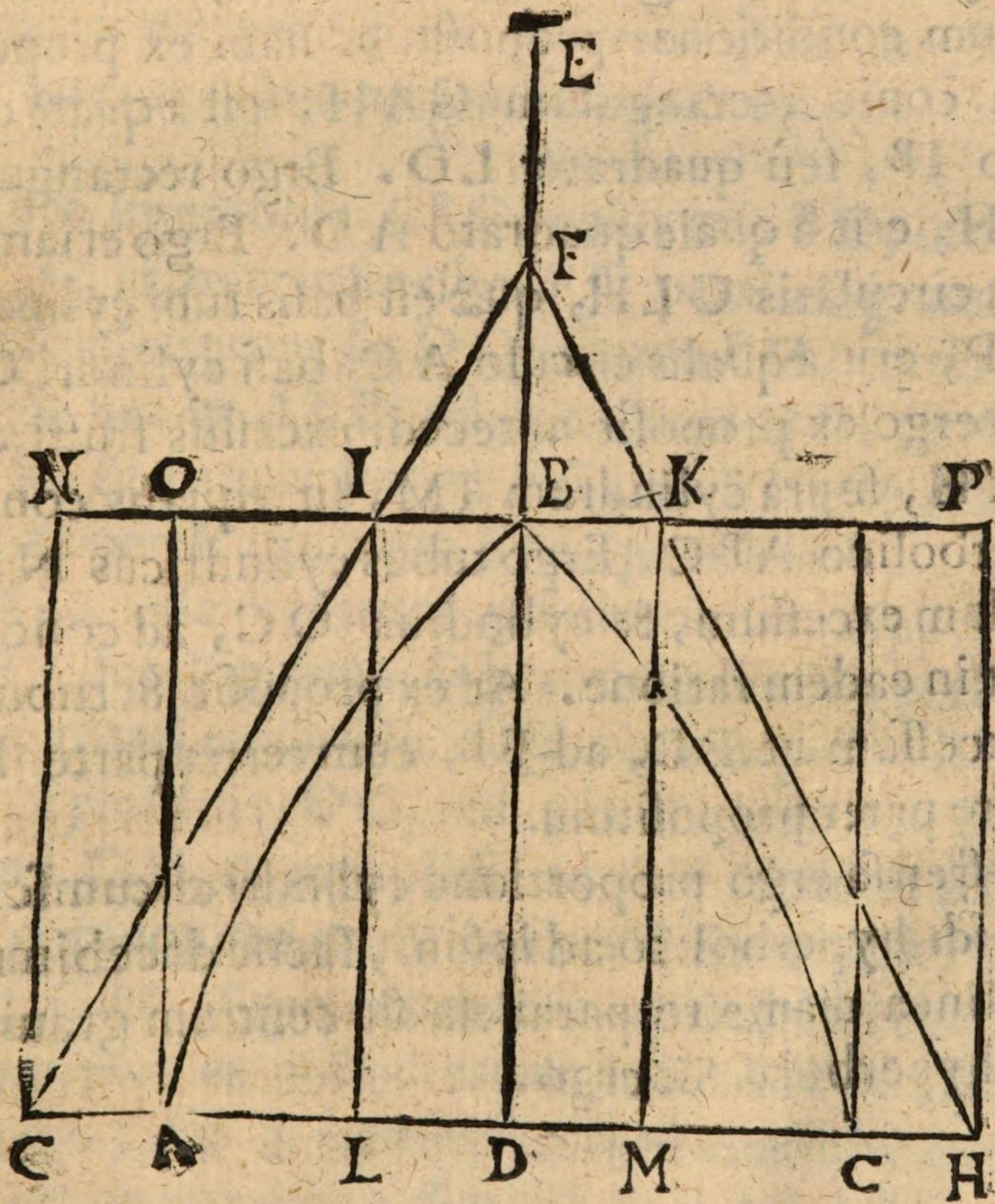
SCHO-

SCHOLIUM III.

Galileus in postremis dialogis pag. apud nos, 28, ostendit paradoxum quodam; nimirum, circuli circumferentiam æqualem esse puncto. Vt hoc ostendat utitur excessu cylindri supra hemisphærium, & cono, ut ibidem potest conspici. Sed sicuti usus fuit excessu cylindri supra hemisphærium, sic etiam poterat uti excessu cylindri supra hemisphæroides; eadem enim fuisset demonstratio. Paradoxum Galilei ostendimus & nos in appendice nostri libelli sexaginta problematum geometricorum, adhibendo excessum cylindri supra conoides parabolicum, & ipsum conoides. Hoc idem paradoxum facile ex præfenti proposit. patebit confirmari posse, adhibendo excessum prædictum frusti conici $G I K H$, supra cylindrum $I M$, & conoides hyperbolicum $A B C$. Probatum est enim, ubicunque traiciatur planum $N P$, plano $G H$, parallelum, semper armillam $N R P$, æqualem esse circulo $Q T$; sicuti quamlibet partem excessus æqualem esse proportionali parti conoidis. Cum ergo excessus prædictus desinat in circumferentia circuli cuius diameter $I k$, sicuti conoides desinit in puncto B ; videtur ergo colligi circumferentiam æqualem esse vertici B .

PROPOSITIO XI.

Cylindrus circumscriptus conoidi hyperbolico est ad ipsum, ut composita ex axi, seu diametro, & ex latere transuerso conoidis, ad dimidium lateris transuersi, una cum tertia parte axis, seu diametri.



COnoidi hyperbolico ABC , cuius diameter DB , latus transversum EB , fit circumscriptus

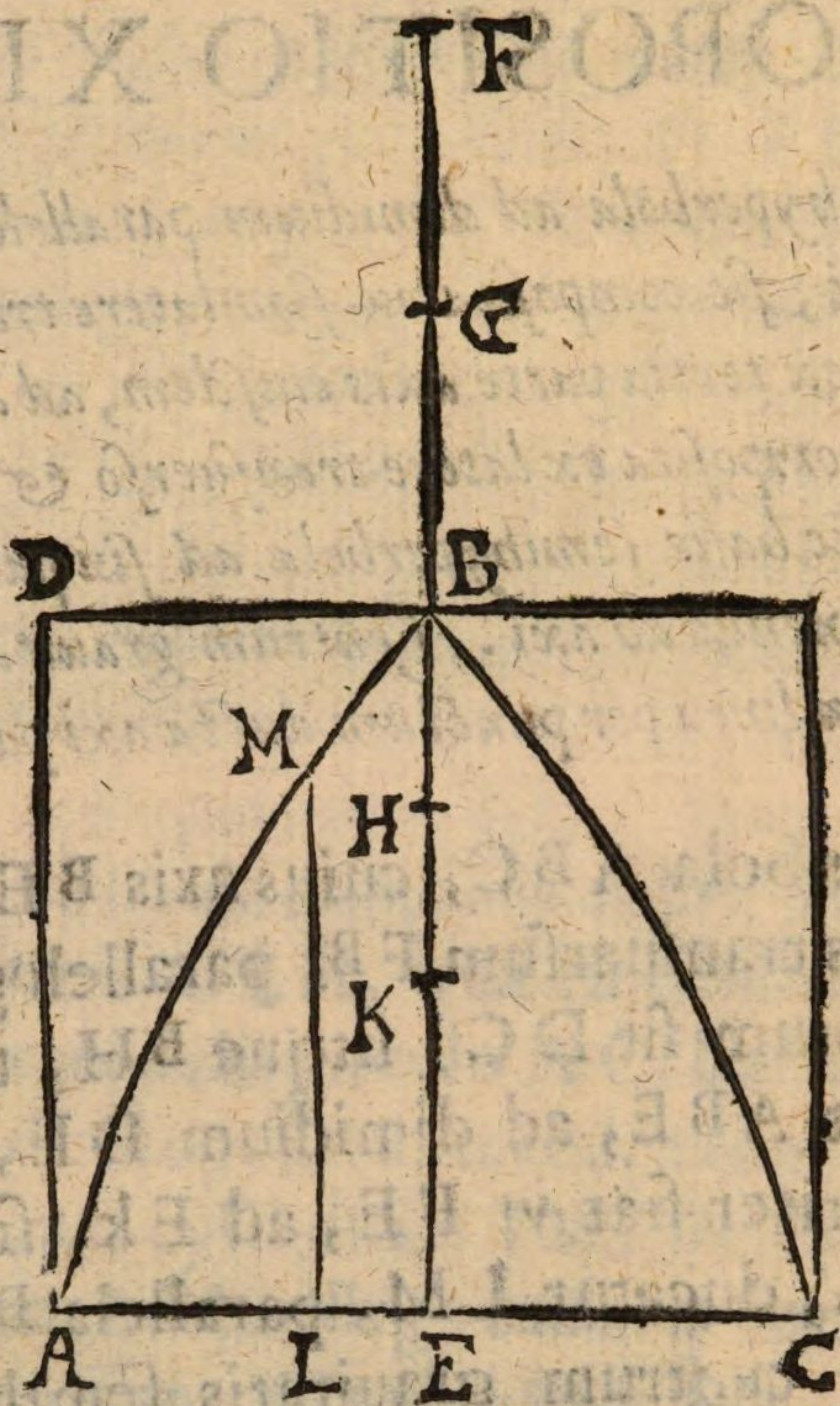
ptus cylindrus OC . Dico hunc esse ad illud ut ED ,
ad dimidiam EB , cum tertia parte BD . Sit F ,
centrum hyperbolæ genitricis, & FG , FH , sint
eius asymptoti, & per B , sit ducta IB , parallela
 GD ; intelligamusque ex reuolutione trapezij
 $GIBD$, circa BD , genitum esse frustum conicum
 $GIKH$, cui sit circumscriptus cylindrus NH , &
inscriptus IM . Quoniam linea GH , diuisa est se-
cundum conditiones proposit. 9. nam ex proposit.
10. 2. conic. rectangulum GAH , est æquale qua-
drato IB , seu quadrato LD . Ergo rectangulum
 GLH , erit æquale quadrato AD . Ergo etiam ar-
milla circularis GLH , quæ est basis tubi cylindrici
 NLP , erit æqualis circulo AC , basi cylindri OC .
Cum ergo ex proposit. anteced. excessus frusti coni
 $GikH$, supra cylindrum IM , sit æqualis conoidi
hyperbolico ABC . Ergo tubus cylindricus NLP ,
ad illum excessum, & cylindrus OC , ad conoides
erunt in eadem ratione. At ex proposit. 8. tubus est
ad excessum ut ED , ad FB , cum tertia parte DB .
Quare patet propositum.

Ostenfa ergo proportione cylindri circumscripti
conoidi hyperbolico ad ipsum, facile docebimus in
qua linea diametro parallela sit centrum grauitatis
femihyperbolæ. Sit ergo.

PROPOSITIO XII.

Si fiat ut semihyperbola ad dimidium parallelogrammi sibi circumscripti, sic composita ex semilatore transuerso hyperbolæ, & ex tertia parte axis eiusdem, ad aliam: deinde fiat ut composita ex latere transuerso & ex axi, ad inuentam, sic basis semihyperbolæ ad sui partem abscondendam incipiendo ab axi. Centrum grauitatis semihyperbolæ erit in linea per punctum ducta axi parallela.

E Sto hyperbola ABC , cuius axis BE ; centrum G ; latus transuersum FB ; parallelogrammum ei circumscriptum sit DC ; sitque BH , tertia pars BE ; & fiat ut ABE , ad dimidium DE , sic GH , ad Ek ; & pariter fiat ut FE , ad Ek , sic AE , ad EL ; ac per L , ducatur LM , parallela BE . Dico in ML , esse centrum grauitatis semihyperbolæ ABE . Intelligamus DE , cum semihyperbola ABE , rotari circa BE . Quoniam ex proposit. 5. 7. & 11. cylindrus DC , est ad conoides ABC , ut FE , ad GH ; & ratio FE , ad GH (de foris sumpta Ek) componitur ex rationibus FE , ad Ek , & huius ad GH . Ergo etiam ratio cylindri ad conoides componetur ex iisdem rationibus. Sed ex schol. 1. proposit. 3. lib. 3. ratio cylindri ad conoides componitur etiam ex ratione dimidij DE , ad ABE , & ex ratione AE , ad interceptam inter EB , & centrum æquilibrij ABE , seu grauitatis duplicatæ ABE ,
ad



ad partes AE ; & supra factum est conuertendo, ut
 dimidium DE , ad ABE , sic kE , ad GH . Er-
 go rationes FE , ad Ek , & Ek , ad GH , æquales
 erunt rationibus Ek , ad GH , & AE , ad prædi-
 ctam interceptam. Ergo si auferatur communis ra-
 tio kE , ad GH ; FE , ad Ek , erit ut AE , ad il-
 lam interceptam. Sed ex constructione, ut FE , ad
 Ek , sic AE , ad EL . Ergo L , erit centrum æqui-
 librij semihyperbolæ. Et consequenter in LM ,
 erit centrum grauitatis semihyperbolæ. Q. od &c.

SCHO-

SCHOLIUM.

Tria autem, quæ collecta sunt in quamplurimis propositionibus lib. 3. colligentur etiam nunc. Nam primò, tam super DE , quam supra ABE , intellectis cylindricis rectis æquealtis resectis diagonaliter plano transeunte per EB , & per latus oppositum ipsi DA , colligentur cubationes amborum truncorum cylindrici super semihyperbola existentis, cum hac tamen diuersitate; quod cubatio trunci sinistri dabitur semota hyperbolæ quadratura; quia sine tali quadratura datur ratio DC , cylindri ad conoides ABC ; secùs dicendum de cubatione trunci dexteri, quæ non habetur nisi supposita quadratura. Secundum est (quadratura supposita) ratio cylindri ex DE , circa DA , ad annulum strictum ex semihyperbola ABE , circa DA . Tertium est ratio conoidis, & prædicti solidi ad inuicem, pariter supposita quadratura.

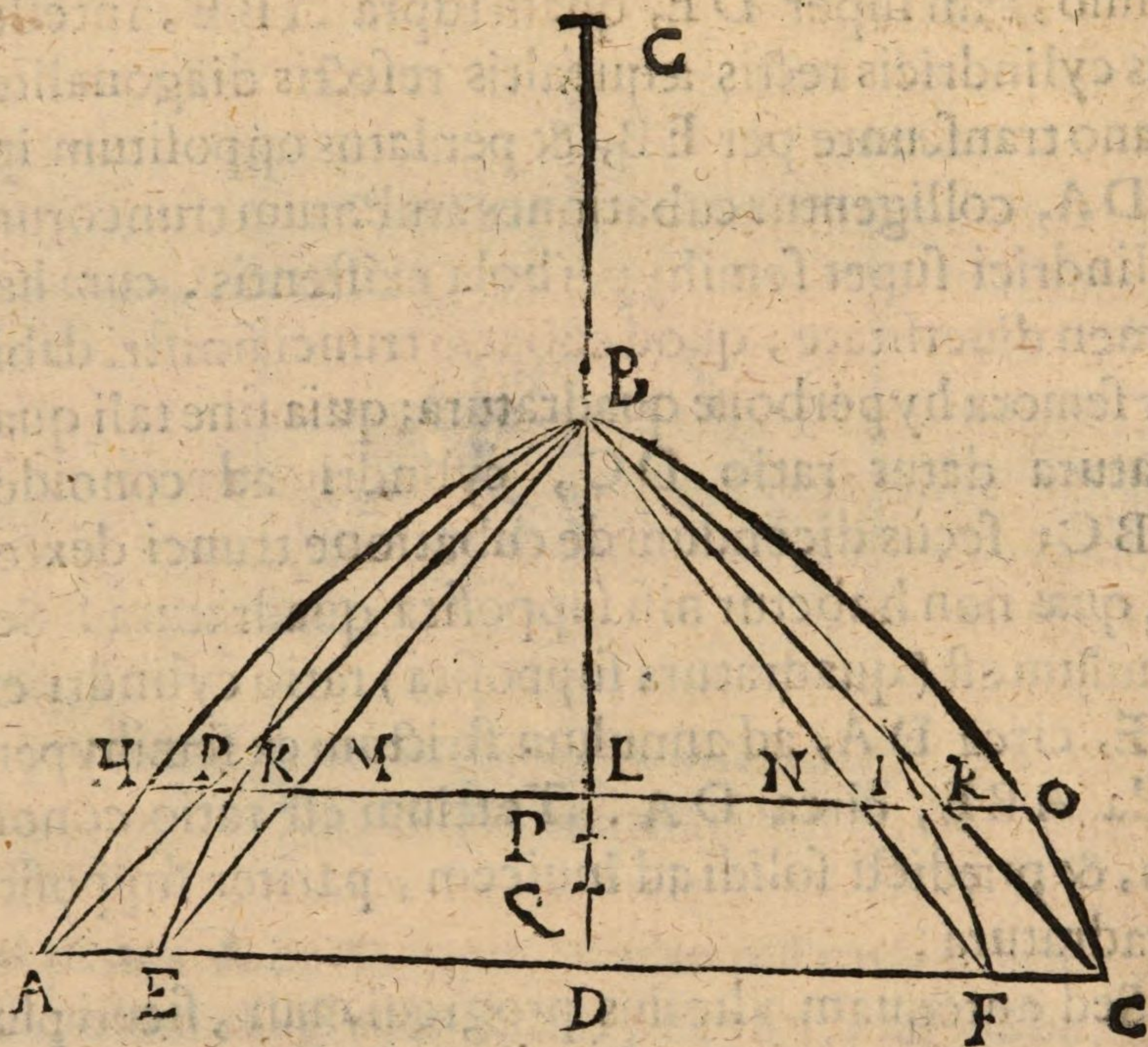
Sed antequam vltius progrediamur, sicuti pluribus modis patefacta est ratio cylindri circumscripti ad conoides, sic non erit inutile assignare centrum grauitatis conoidis. Sit ergo.

PROPOSITIO XIII.

Centrum grauitatis conoidis hyperbolici sic diuidit duodecimam partem diametri eiusdem ordine quartam à ba-

E si, ut

si, ut pars propinquior basi, sit ad reliquam, ut dimidium lateris transversi conoidis, ad tertiam partem suae diametri.



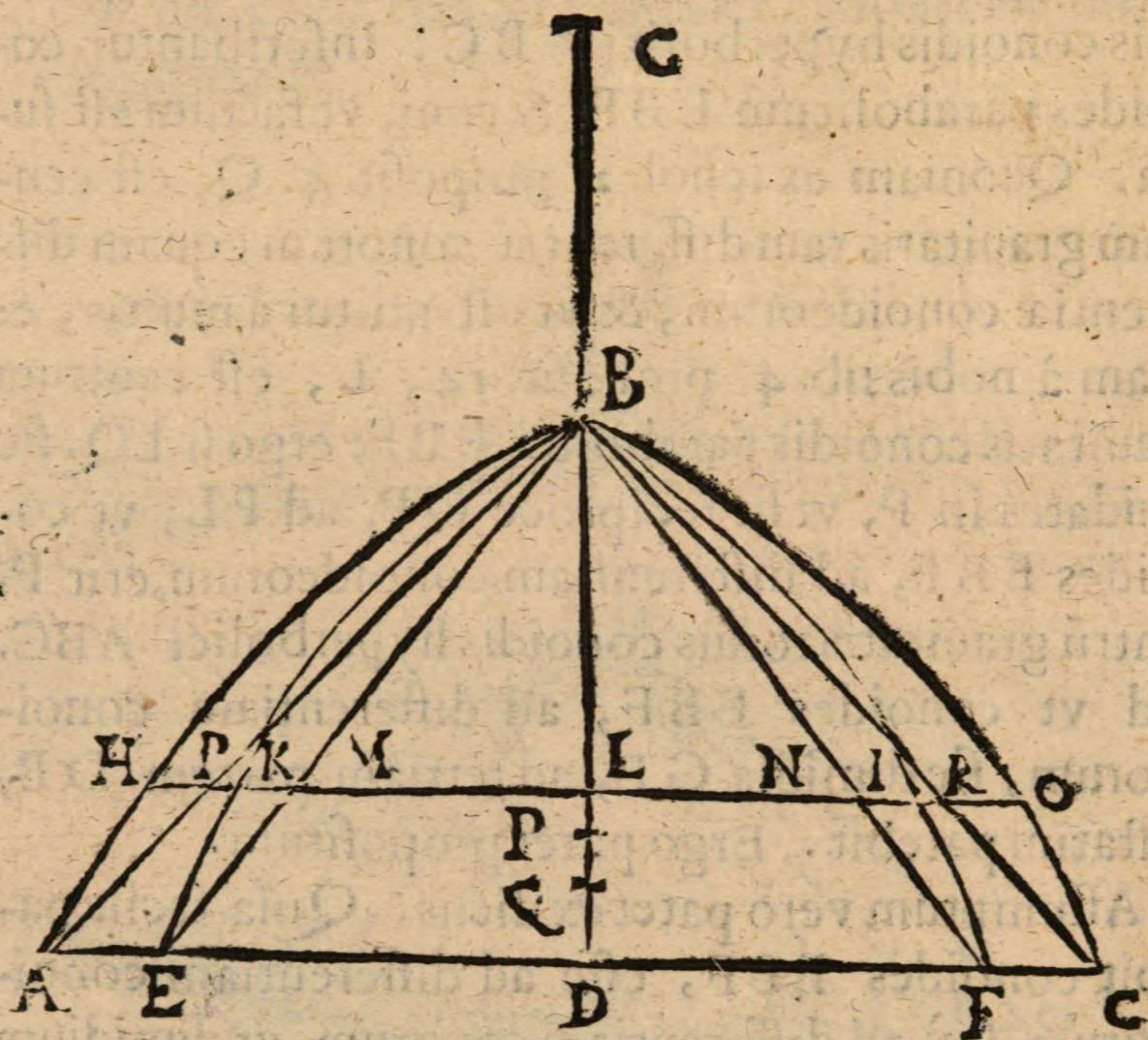
E Sto conoides hyperbolicum quodcunque ABC , cuius axis, seu diameter BD , sic fecetur in L , ut BL , sit dupla LD , & sic in Q , ut BQ , sit tripla QD . Ergo sic LQ , erit duodecima pars totius BD , & ordine quarta incipiendo à D . Sit GB , latus transversum conoidis, & LQ , sic fece-

secetur in P , ut QP , sit ad PL , ut dimidia GB , ad tertiam partem BD . Dico P , esse centrum gravitatis conoidis hyperbolici ABC . Inscribebantur conoides parabolicum EBF , & conus, ut factum est supra. Quoniam ex schol. 2. proposit. 4. Q , est centrum gravitatis tam differentiae conorum, quam differentiae conoideorum, & ut ostenditur à multis, & etiam à nobis lib. 4. proposit. 14, L , est centrum gravitatis conoidis parabolici EBF ; ergo si LQ , sic diuidatur in P , ut sit reciprocè QP , ad PL , ut conoides EBF , ad differentiam conoideorum, erit P , centrū gravitatis totius conoidis hyperbolici ABC . Sed ut conoides EBF , ad differentiam conoideorum, sic dimidia GB , ad tertiam partem DB , ut statim patebit. Ergo patet propositum.

Assumptum vero patet ex dictis. Quia facile patebit conoides EBF , esse ad differentiam conoideorum, seu ad differentiam conorum, ut dimidium quadrati DE , ad tertiam partem rectanguli AEC . Sed cum ex data hypothesis, sit diuidendo, & convertendo, quadratum DE , ad rectangulum AEC , ut GB , ad BD . Erit & ut dimidium quadrati DE , ad tertiam partem rectanguli AEC , sic dimidia GB , ad tertiam partem BD .

SCHOLIUM.

Si quis verò scire cupiat, in qua proportionem secetur tota BD , à centro gravitatis P , hoc tali discursu



fu obtinebit. Quoniam enim conuertendo LP, est
 ad PQ, vt tertia pars BD, ad dimidiam GB;
 ergo cum BL, fit octupla LQ, BP, erit ad PQ,
 vt 9. tertiae partes BD (nempe vt tripla BD) cum
 8. dimidijs GB (nempe cum quadrupla GB) ad
 dimidiam GB. Pariter cum DQ, fit tripla QL;
 erit PQ, ad PD, vt dimidia GB, ad quadruplam
 dimidiam GB (nempe ad duplam GB) vna cum
 tribus tertijs partibus BD (nempe cum BD). Er-
 go ex æquali, erit BP, ad PD, vt quadrupla GB,

vna

37

vna cum tripla BD , ad duplam GB , cum BD .
Et subquadruplando terminos, erit BP , ad PD ,
vt GB , cum subsesquitercia BD , ad dimidiam GB ,
cum quarta parte BD .

PROPOSITIO XIV.

Centrum grauitatis conoidis hyperbolici sic diuidit quartam partem diametri eiusdem ordine secundam à basi, vt pars propinquior basi sit ad reliquam, vt sexta pars lateris transuersi, ad tertiam partem compositæ ex latere transuerso, & ex diametro.

SEd in schem. anteced. supponat prudens geometra diametrum BD , secari bifariam in L , & LD , bifariam in Q ; deinde LQ , sic secari in P , vt QP , sit ad PL , vt sexta pars GB , ad tertiam partem GD . Dico P , esse centrum grauitatis conoidis ABC . Cum enim Q , sit centrum grauitatis coni ABC , & ex schol. proposit. 6. L , sit centrum excessus conoidis supra conum; & cum sit QP , ad PL , vt sexta pars GB , ad tertiam partem GD , nempe ex hypothesi, vt sexta pars quadrati DE , ad tertiam partem quadrati AD ; nempe ex schol. cit. vt excessus conoidis supra conum ad ipsum conum. Ergo ex Archimede in æqueponderantibus, erit P , centrum grauitatis totius conoidis.

SCHO.

SCHOLIUM.

Modus præfens assignandi centrum grauitatis conuenit cum antecedenti, vt attentè consideranti patebit. Effet etiam alius modus inueniendi tale centrum grauitatis, inuento prius centro grauitatis excessus frusti conici supra cylindrum sibi inscriptum. Ex schol. enim 3. proposit. 10. patet talem excessum, & conoides hyperbolicum, esse quantitates proportionaliter analogas. Centrum verò grauitatis prædicti excessus facile habebitur. Nam ex dictis in lib. 4. totius frusti coni habetur pluribus modis centrum grauitatis. Sed habetur etiam centrum grauitatis cylindri in frusto inscripti; habeturque ratio talis cylindri ad excessum frusti supra ipsum. Quare centrum prædicti excessus non ignorabitur. Vice versa tamen, modi reperiendi centrum grauitatis conoidis assignati in duabus proposit. anteced. quadrabunt etiam prædicto excessui.

Sed sicuti in superioribus docuimus in qua linea diametro parallela sit centrum grauitatis semihyperbolæ, sic videtur conueniens docere in qua linea diametro parallela sit centrum grauitatis segmenti semihyperbolæ contenti inter duas lineas basi parallelas. Sed cum inuentioni talis lineæ præmissa sit ratio cylindri circumscripti conoidi ad ipsum conoides, sic in præsentiarum anteponenda videtur ratio cylindri circumscripti segmento conoidis hyperbolici

39

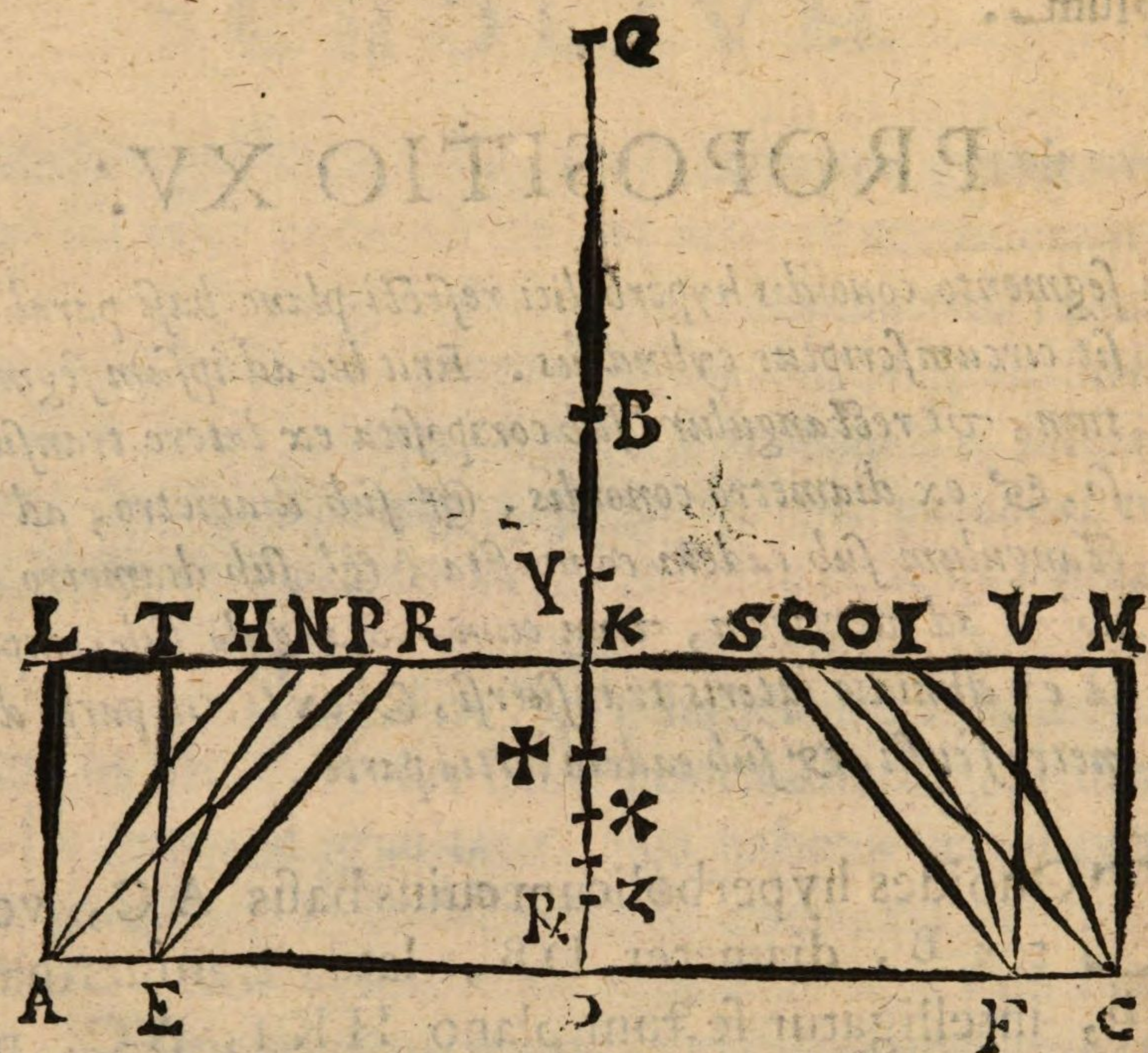
bolici contento inter duo plana basi parallela, ad ipsum.

PROPOSITIO XV.

Si segmento conoidis hyperbolici resecti plano basi parallelo, sit circumscriptus cylindrus. Erit hic ad ipsum segmentum, ut rectangulum sub composita ex latere transuerso, & ex diametro conoidis, & sub diametro, ad rectangulum sub eadem composita, & sub diametro conoidis ad verticem, una cum rectangulo sub composita ex dimidio lateris transuersi, & ex tertia parte diametri frusti, & sub eadem tertia parte.

COnoides hyperbolicum cuius basis AC , vertex B , diameter DB , latus transuersum GB , intelligatur sectum plano HKI , AC , parallelo, & ipsi sit circumscriptus cylindrus LC . Dico hunc esse ad segmentum conoidis, ut rectangulum GDB , ad rectangulum sub GD , in Bk , una cum rectangulo sub composita ex dimidia GB , & tertia parte Dk , & sub tertia parte Dk .

Segmento $AHIC$, intelligatur inscriptum segmentum $ENOF$, conoidis parabolici cuius vertex B , conditionis supra saepe expositae; & in talibus segmentis intelligantur segmenta conorum inscriptorum in integris conoidibus, quae sint $APQC$, $ERSF$. Quoniam frustum $AHIC$, constat ex frusto parabolico, & ex differentia frustorum conoideo-

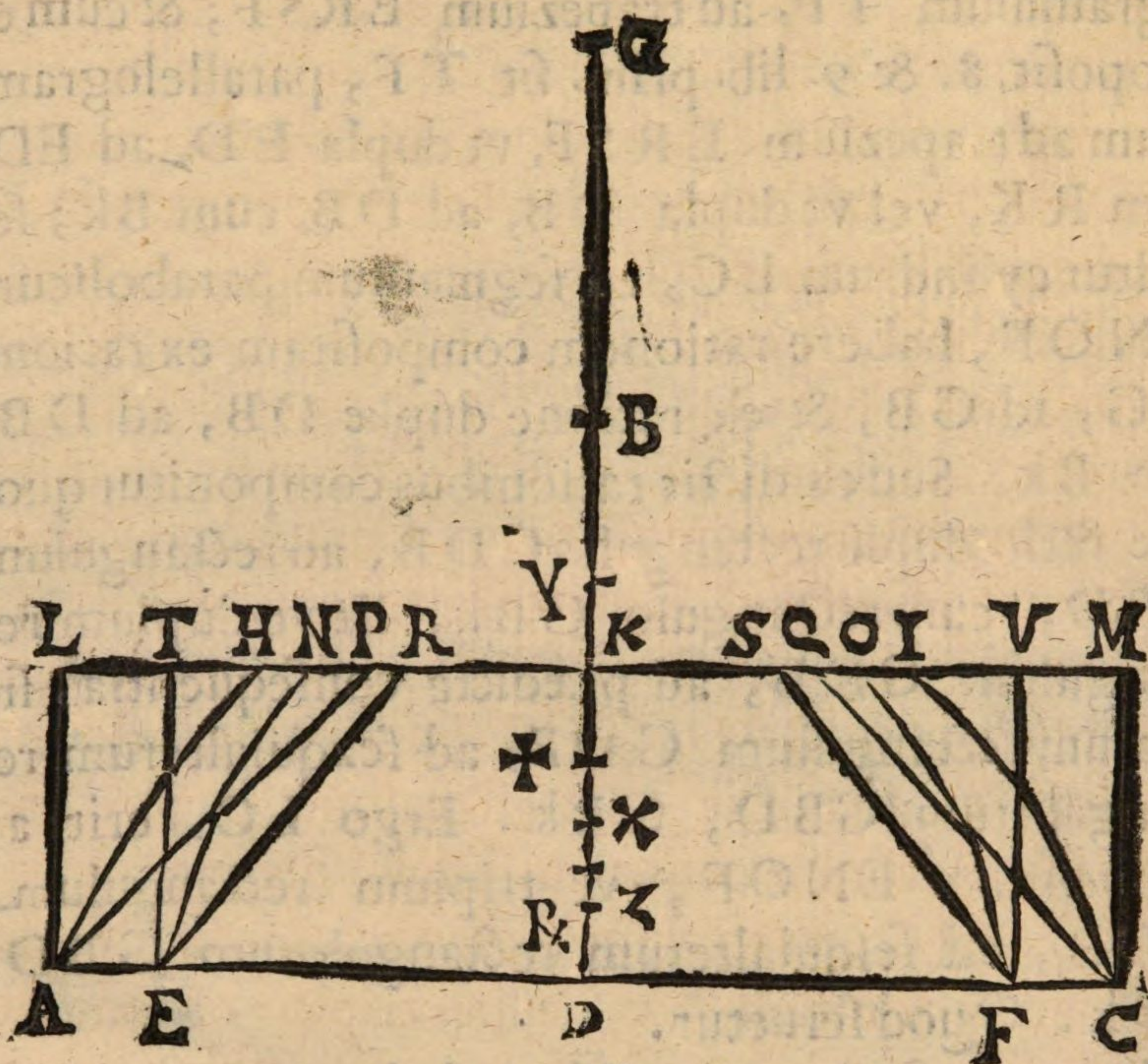


deorum; & ex proposit. 4, differentia frustorum conoideorum est æqualis differentiæ conorum; ergo LC , erit ad frustum $AHIC$, ut est ad frustum parabolicum, una cum differentia frustorum conorum. Hanc verò rationem sic venabimur. Cylindrus LC , ad frustum parabolicum $ENOF$, habet rationem compositam ex ratione cylindri LC , ad cylindrum TF , tali frusto parabolico circumscriptum, & huius ad ipsum frustum: LC , ad TF , est ut quadratum AD , ad quadratum ED ; nempe ex hypothese, ut DG , ad GB . Cum autem ex pro-

proposit. 3. lib. 4. sit TF , ad $ENOF$, ut parallelogrammum TF , ad trapezium $ERSF$; & cum ex proposit. 8. & 9. lib. prim. sit TF , parallelogrammum ad trapezium $ERSF$, ut dupla ED , ad ED , cum RK , vel ut dupla DB , ad DB , cum Bk ; sequitur cylindrum LC , ad segmentum parabolicum $ENOF$, habere rationem compositam ex ratione DG , ad GB , & ex ratione duplæ DB , ad DB , cum Bk . Sed ex dictis rationibus componitur quoque ratio dupli rectanguli GDB , ad rectangulum GBD , cum rectangulo GBk . Et ut duplum rectangulum GDB , ad prædicta consequentia, sic triplum rectangulum GDB , ad sexquialterum rectangulorum GBD , GBk . Ergo LC , erit ad segmentum $ENOF$, ut triplum rectangulum GDB , ad sesquialterum rectangulorum GBD ; GBk . Quod seruetur.

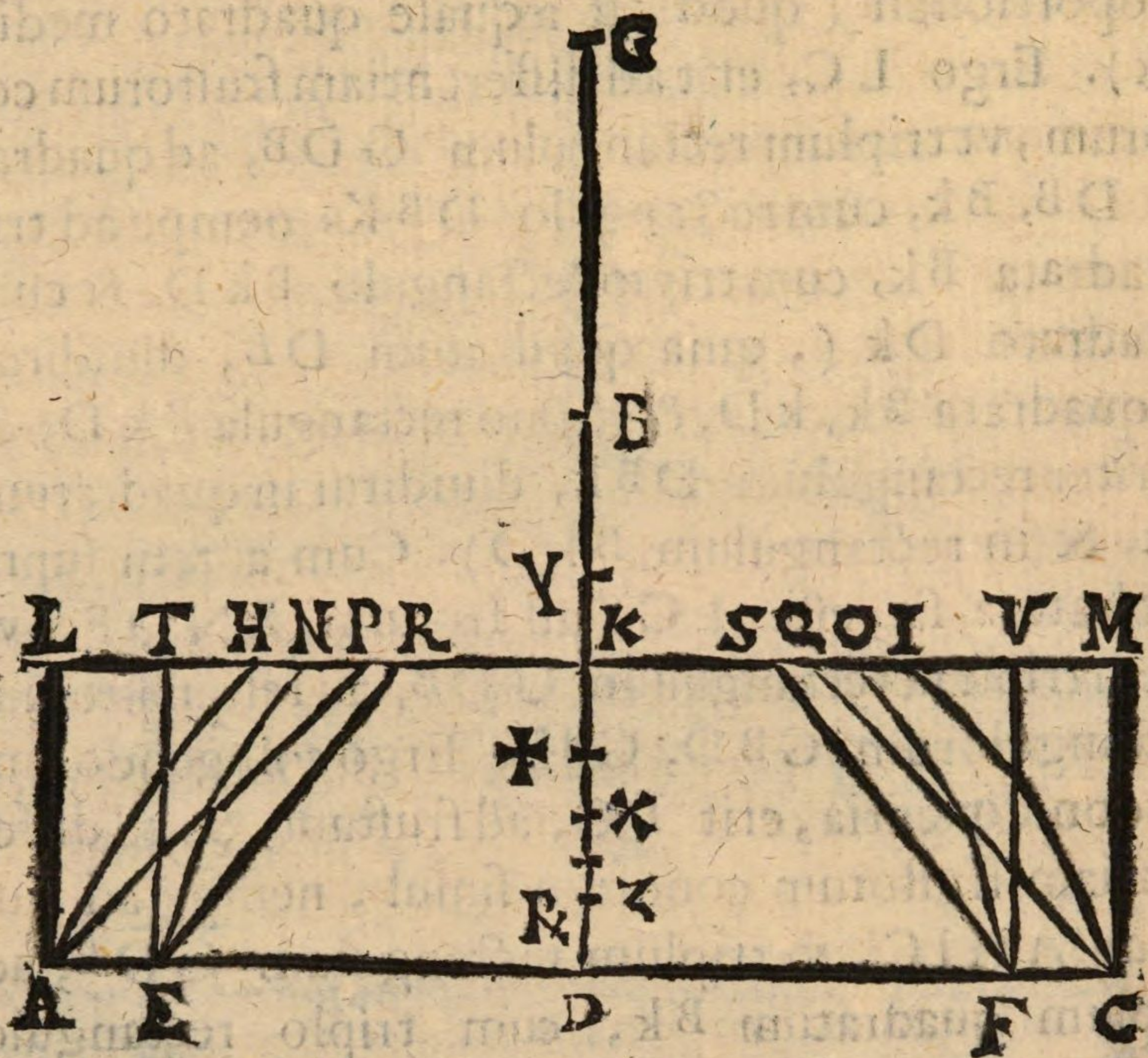
Ex proposit. 14, & 15, lib. 2. habemus tam totum cylindrum LC , quam ablatum TF , esse illum ad frustum conicum $APQC$, hunc verò ad frustum conicum $ERSF$, ut tripla DB , ad DB , BR , & harum tertiam minorem continuè proportionalem. Ergo & reliquum ad reliquum erit ut totum ad totum: nempe tubus cylindricus LEM , erit ad differentiam frustorum conorum, ut tripla DB , ad DB , Bk , & illam tertiam proportionalem. Tunc argumentetur sic. Ratio cylindri LC , ad differentiam segmentorum conorum componitur ex ratione LC , ad tubum LEM , & huius ad differentiam segmen-

F torum



torum conorum : at LC , ad tubum est vt quadra-
tum AD , ad rectangulum AEC , nempe ex hy-
pothesi supposita per conuersionem rationis , vt
 GD , ad DB : tubus autem est ad differentiam fru-
storum conorum vt tripla DB , ad DB , Bk , & il-
lam tertiam proportionalem. Ergo ratio LC , ad
differentiam segmentorum conorum componetur
quoque ex rationibus GD , ad DB , & triplæ DB ,
ad DB , Bk , & illam tertiam proportionalem. Sed
ex dictis rationibus componitur etiam ratio tripli
rectanguli GDB , ad quadratum DB , rectangulum
 DBk ,

DBk , & rectangulum sub DB , & sub illa tertia
 proportionali (quod est æquale quadrato mediæ
 Bk). Ergo LC , erit ad differentiam frustorum co-
 norum, vt triplum rectangulum GDB , ad quadra-
 ta DB , Bk , cum rectangulo DBK ; nempe ad tria
 quadrata Bk , cum triplo rectangulo BkD , & cum
 quadrato Dk (, quia quadratum DB , diuiditur
 in quadrata Bk , kD , & in duo rectangula BkD ; &
 pariter rectangulum DBk , diuiditur in quadratum
 Bk , & in rectangulum BkD). Cum autem supra
 probatum sit, esse LC , ad frustum $ENOF$, vt
 idem triplum rectangulum GDB , ad sesquialterum
 rectangulorum GBD , GBk . Ergo colligendo am-
 bo consequentia, erit LC , ad frustum, & ad diffe-
 rentiam frustorum conorum simul, nempe ad fru-
 stum $AHIC$, vt triplum rectangulum GDB , ad
 triplum quadratum Bk , cum triplo rectangulo
 BkD , cum quadrato KD , & cum sesquialtero re-
 ctangulorum GBD , GBk . Ergo & vt horum pla-
 norum tertiæ partes: nempe LC , erit ad $AHIC$,
 vt rectangulum GDB , ad quadratum BK , cum
 rectangulo BkD , & cum tertia parte quadrati Dk ,
 vna cum dimidio rectangulorum GBD , GBK .
 Cum verò dimidium rectanguli GBD , diuidatur
 in dimidium GBK , & in dimidium GB , KD .
 Ergo dimidium rectangulorum GBD , GBK , erit
 rectangulum GBk , cum dimidio rectanguli GB ,
 KD . Si ergo simul iunxerimus rectangulum GBK ,
 cum quadrato BK , & cum rectangulo BKD , habe-



bimus rectangulum GD, BK . Pariter si simul iunxerimus rectangulum sub dimidia GB , & sub DK , cum tertia parte quadrati DK , nempe cum rectangulo sub DK , & sub tertia parte Dk , habebimus rectangulum sub composita ex dimidia GB , & ex tertia parte Dk , & sub DK . Ergo à primo ad ultimum concludemus, esse LC , ad frustum conoidis hyperbolici $AHIC$, ut rectangulum GDB , ad rectangulum GD, BK , cum rectangulo sub composita ex dimidia GB , & ex tertia parte Dk , & sub DK . Quod erat ostendendum.

SCHO-

S C H O L I V M.

Proportionem prædicti cylindri ad illud segmen-
tum hyperbolicum, etiam duobus alijs modis, con-
sequenter ad superius dicta, siceret colligere. Cum
enim tale segmentum constet ex segmento conici sibi
inscripto, & ex excessu supra ipsum; & cum talis ex-
cessus sit æqualis excessui segmenti conoidis para-
bolici supra suum segmentum conicum; & cum ex
dictis in ijs, quæ de infinitis parabolis conscripsi-
mus, facile liceat colligere rationem LC , & ad seg-
mentum conicum $APQC$, & ad excessum segmen-
ti conoidis parabolici $ENOF$, supra segmentum
conicum $ERSF$: sequitur facile etiam nos obtine-
re rationem LC , ad segmentum $AHIC$. Pari-
ter si in schemat. proposit. 10. tam segmento v. g.
 $AQTC$, quam segmento excessus frusti conici
 $GNPH$, supra cylindrum RM , mente concipia-
mus circumscribi cylindros; patet ex dictis in eadem
propositione, tubum cylindricum cuius basis armil-
la circularis GLH , altitudo OD , æqualem esse
cylindro circumscripto segmento $AQTC$. Pari-
terque patet excessum frusti $GNPH$, supra cylin-
dram RM , æqualem esse segmento $AQTC$. Cum
ergo ex dictis in opere supra citato, facilissime
possimus habere rationem prædicti tubi ad illum ex-
cessum supra cylindrum; faciliter etiam habebimus
rationem cylindri circumscripti segmento hyperbo-
lico.

lico $AQTC$, ad ipsum segmentum. Hæc non continent multum difficultatis, quapropter sufficiat ea lectoribus indicasse.

Sicuti sufficiat ex antecedentibus indicare modum reperiendi in quâ linea parallela Dk , sit centrum grauitatis suppositi segmenti semihyperbolæ $AHkD$. Hoc autem reperietur ex dictis, si supponatur segmenti $AHKD$, quadratura, nempe ratio, quam habet ad ipsum parallelogrammum LD . Cum enim cylindrus LC , habeat ad segmentum conoidis $AHIC$, ex schol. pri. prop. 3. lib. 3. rationem compositam ex ratione dimidij parallelogrammi LD , ad segmentum $AHKD$, & ex ratione AD , ad interceptam inter D , & centrum æquilibrj segmenti acceptum in AD , hoc est centrum grauitatis duplicati segmenti $AHKD$, ad partes AD ; sequitur, quod si ex proportionem cylindri LC , ad segmentum conoidis $AHIC$; nempe ex ratione expressa in præsentî propositione, subtrahatur supposita ratio dimidij parallelogrammi LD , ad segmentum parabolæ $AHKD$, remanebit ratio AD , ad interceptam inter D , & centrum quæsitum.

Hoc puncto inuento, non ignorabimus tria solita, quæ sæpe sæpius deduximus in non paucis propositionibus lib. 3. Nam primo non ignorabimus rationem cylindri ex LD , ad solidum ex segmento $AHKD$, circa LA . Secundo non ignorabimus rationem segmenti $AHIC$, ad solidum prædictum circa AL . Tertio tam supra LD , quam supra $AHKD$,

$AHkD$, intellectis cylindricis rectis æquealtis sectionis diagonaliter plano transeunte per Dk , & per latus oppositum ipsi LA , minimè ignorabimus cubationes truncorum cylindrici super $AHkD$, existentis. Hac tamen differentia, quod cubationem trunci sinistri habebimus sine suppositione alicuius quadraturæ; non sic cubationem trunci dexteri.

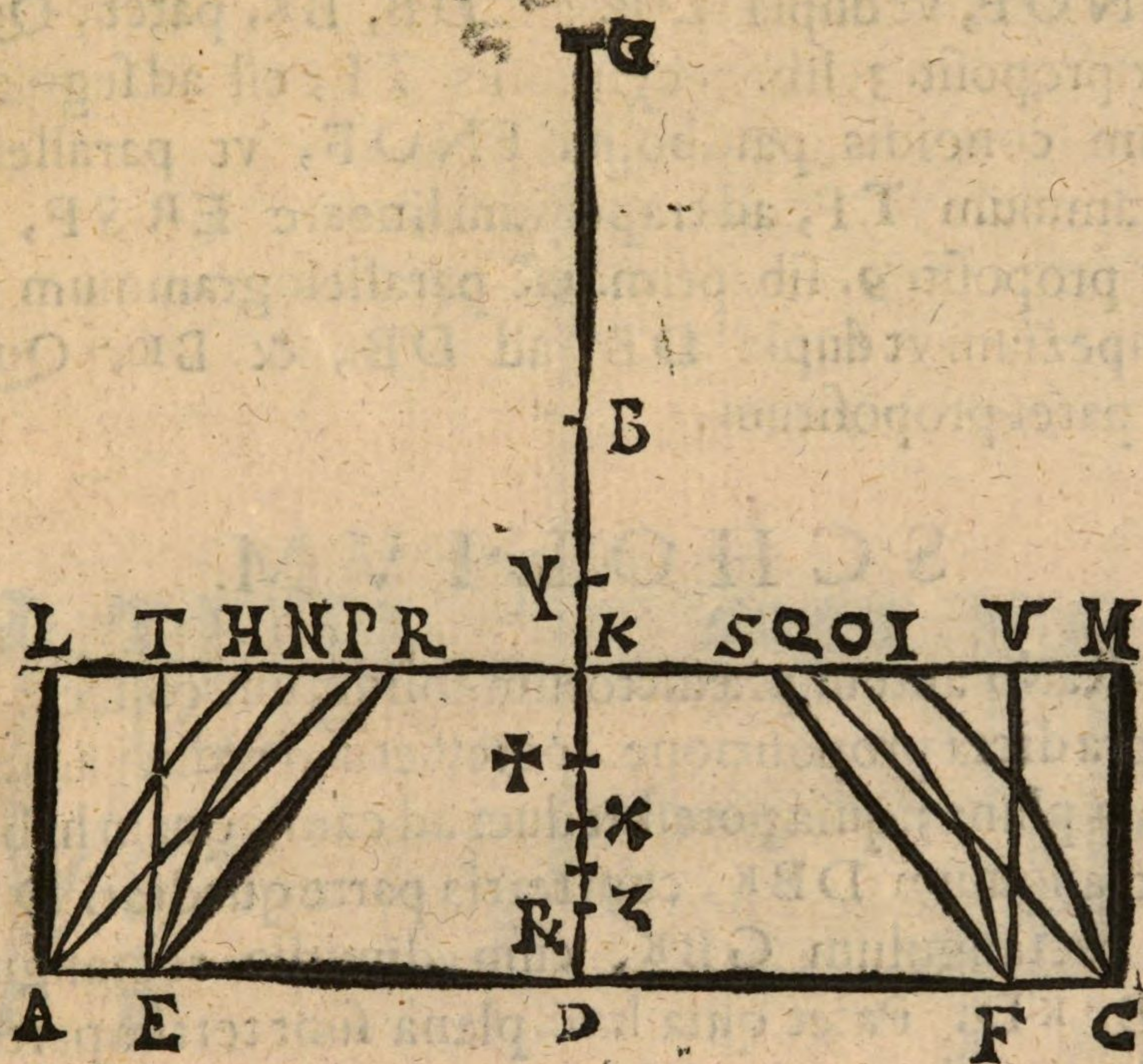
His ostensis non erit inutile ostendere modum inueniendi centrum grauitatis segmenti conoidis hyperbolici $AHIC$. Sed prius ostendatur sequens propositio.

PROPOSITIO XVI.

Differentia supradictorum frustorum conoideorum est ad segmentum conoidis parabolici, ut quadrata axium totius conoidis, & conoidis ad verticem, una cum reſt angulo contento sub his axibus, ad ſeſquialterum reſt angulorum contentorum ſub latere tranſuerſo, & ſub prædictis axibus.

SInt ergo ſegmenta anteced. proposit. Dico differentiam frustorum $AHIC$, $ENOF$, eſſe ad ſegmentum parabolicum $ENOF$, ut quadrata DB , Bk , cum reſt angulo DBk , ad ſeſquialterum reſt angulorum GBD , GBK . Differentia enim prædicta ad ſegmentum $ENOF$, habet rationem compositam ex ratione differentię ad tubum cylindricum

dricum LEM ; huius ad cylindrum TF ; & huius ad segmentum $ENOF$. Cum autem differentia frustorum conoideorum sit, ex supradictis, æqualis differentiæ frustorum conorum inscriptorum in ipsis; & cum differentia frustorum conorum sit ad tubum LEM , vt facile potest deduci ex dictis in schol. 4. proposit. 14. lib. 2. vt DB , cum BK , & cum harum tertia minori proportionali ad tres DB . Sequitur etiam differentiam segmentorum conoideorum, esse ad tubum cylindricum LEM , vt DB , BK , & illa tertia proportionalis ad tres DB . Cum verò LEM , tubus sit ad cylindrum TF , vt rectangulum AEC , ad quadratum ED , nempe diuidendo, ex hypothese frequenter vsa, vt DB , ad BG , seu vt tripla DB , ad triplam GB . Ergo ex æquali, erit differentia segmentorum conoideorum ad cylindrum TF , vt DB , Bk , cum illa tertia proportionali ad triplam GB . Cylindrus TF , est ad segmentum $ENOF$, vt dicetur inferius, vt dupla DB , ad DB , cum BK . Ergo à primo ad vltimum, differentia segmentorum conoideorum ad segmentum $ENOF$, habebit rationem compositam ex ratione DB , Bk , & harum tertiæ proportionalis ad triplam BG , & ex ratione duplæ DB , ad DB , Bk . Sed ex dictis rationibus componitur quoque ratio duorum quadratorum BD , duorum rectangulorum DBK , & duorum rectangulorum sub DB , & sub illa tertia proportionali (quæ duo vltima rectangula sunt æqualia duobus quadratis mediæ



mediæ BK), ad tria rectangula GBD , cum tribus
 rectangulis GBK . Ergo differentia frustorum co-
 noideorum, erit ad segmentum $ENOF$, vt duo
 quadrata DB , cum duobus rectangulis DBK , &
 cum duobus quadratis BK , ad tria rectangula
 GBK , cum tribus rectangulis GBD . Et vt ho-
 rum terminorum dimidia. Nempe differentia præ-
 dicta, erit ad prædictum segmentum, vt quadrata
 DB , BK , cum rectangulo DBK , ad sesquialte-
 rum rectangulorum GBD , GBK . Quod erat
 ostendendum.

G Quod

Quod verò TF , cylindrus sit ad segmentum $ENOF$, ut dupla DB , ad DB , BK , patet. Quia ex proposit. 3. lib. 4. cylindrus TF , est ad segmentum conoidis parabolici $ENOF$, ut parallelogrammum TF , ad trapezium lineare $ERSF$, At ex proposit. 9. lib. prim. est parallelogrammum ad trapezium ut dupla DB , ad DB , & BK . Quare patet propositum.

SCHOLIUM.

Ratio autem prædictorum solidorum collecta in supradicta propositione, potest etiam reduci ad minora plana; quia potest reduci ad eam, quam habet rectangulum DBK , cum tertia parte quadrati DK , ad rectangulum GBK , cum dimidio rectanguli GB , KD . Patet quia hæc plana sunt tertiæ partes priorum planorum.

PROPOSITIO XVII.

Segmenti supradicti conoidis hyperbolici centrum gravitatis reperire.

Segmenti conoidis hyperbolici $AHIC$, centrum gravitatis reperietur sic. Inscriptis solidis ut supra, secetur KD , sic in X , ut KX , sit ad XD , ut duplum quadratum ED , cum quadrato NK , ad duplum quadratum NK , cum quadrato ED ,

uidatur ergo $X\mathbb{R}$, in Z , ut sit XZ , ad $Z\mathbb{R}$, ut quadrata DB , BK , cum rectangulo DBK , ad fefquialterum rectangulorum GBD , GBk ; feù ut rectangulum DBK , cum tertia parte quadrati Dk , ad rectangulum GBk , cum dimidio rectanguli GB , kD ; nempe ex propofit. anteced. ut est differentia fruftorum conoideorum ad fruftum conoidis parabolici $ENOF$. Dico inuentum effe Z , centrum grauitatis frufti conoidis hyperbolici $AHIC$. Cum autem res fit de sè euidens ex doctrinis Archimedis in æqueponderantibus, relinquitur confiderationi lectoris.

SCHOLIUM.

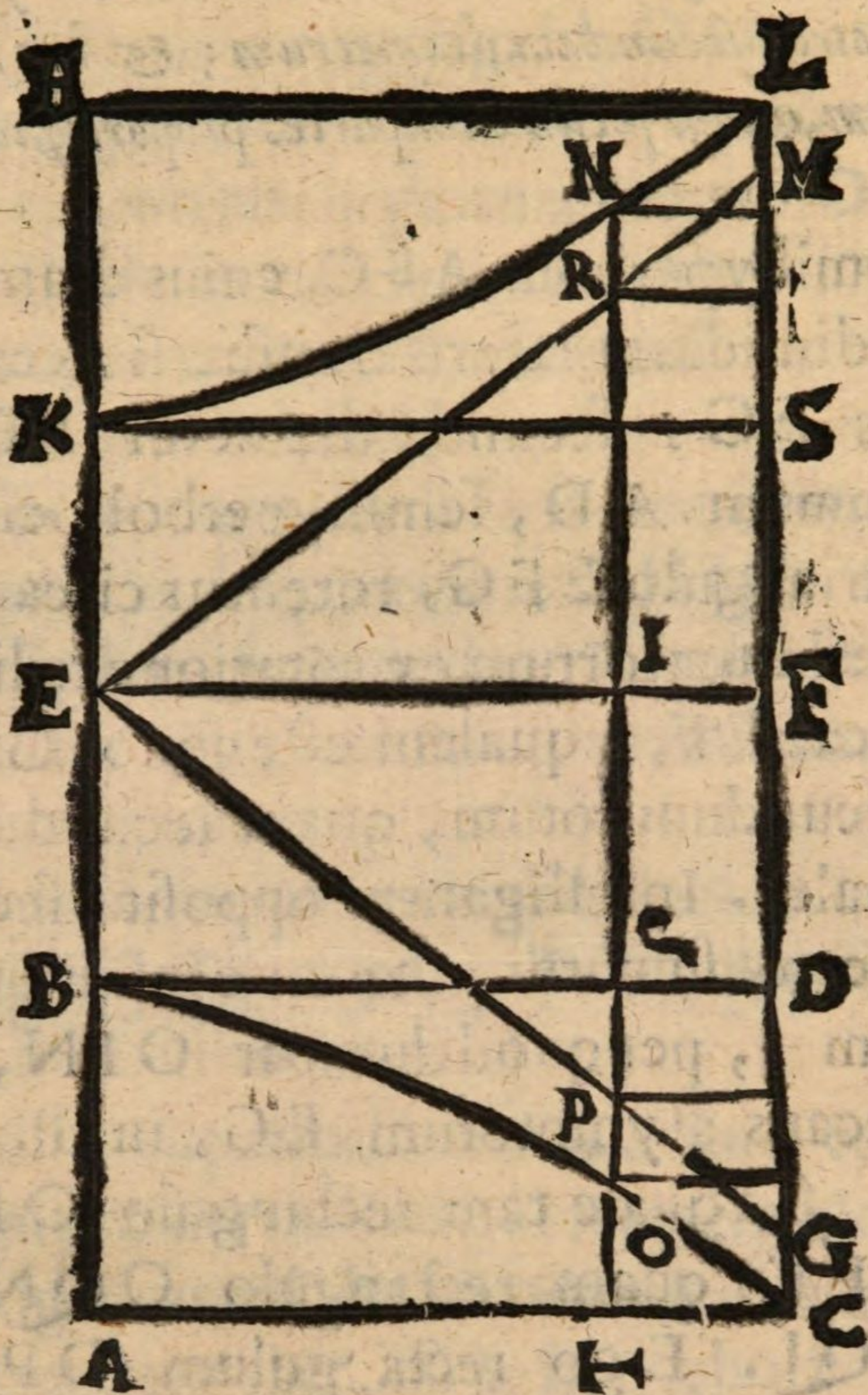
Alij modi ex superioribus non defunt reperiendi tale centrum grauitatis; fed nè lectorem nimis quam par fit defatigemus, ad alia, & noua tranfeamus; præcipuè ad centrum grauitatis hyperbolæ reperiendum. Quod tamen non reperietur nifi præmiſſis quibusdam demonſtrationibus.

PROPOSITIO XVIII.

Si femihyperbola cum ſibi circumſcripto parallelogrammo rotetur circa ſecundam coniugatam diametrum. Annulus latus ortus ex rotatione exceſſus parallelogrammi ſupra femihyperbolam, erit æqualis cono ex triangulo, cuius unum latus dimidia ſecunda diametri, aliud inter-

intercepta inter secundam diametrum, & asymptotum, reuoluto circa secundam diametrum; & hoc tam secundum totum, quam secundum partes proportionales.

ESto semihyperbola ABC , cuius diameter AB ; EB dimidium lateris transuersi; centrum E ; asymptotus EG ; secunda diameter EF ; & parallelogrammum AD , semihyperbolæ circumscriptum cum triangulo EFG , rotentur circa EF . Dico annulum latum ortum ex rotatione trilinei mixti CBD , circa EF , æqualem esse cono. GEM , & hoc tam secundum totum, quam secundum partes proportionales. Intelligantur oppositæ sectiones vt in schemate, & sumatur arbitrariè in EF , quodlibet punctum I , per quod ducatur ON , parallela LC , secans asymptotum EG , in P . Quadratum IO , est æquale tam rectangulo OPN , cum quadrato PI , quam rectangulo OQN , cum quadrato QI . Ergo rectangulum OPN , cum quadrato PI , erit æquale rectangulo OQN , cum quadrato QI . Sed ex proposit. III . sec. conic. rectangulum OPN , est æquale quadrato BE , seu quadrato QI . Ergo reliquum rectangulum OQN , erit æquale reliquo quadrato PI . Quare & armilla circularis OQN , erit æqualis circulo PR . Cum vero punctum I , sumptum sit arbitrariè; ergo omnes armillæ circulares parallelæ armillæ CDL , ortæ ex rotatione trilinei CBD , circa EF , erunt æquales omnibus circulis cono GEM . Et consequen-



quenter annulus latus ortus ex rotatione illius trifi-
nei circa EF , erit æqualis cono GEM . Quod
vero probatum est de totis, patet eodem modo posse
probari de partibus proportionalibus; v. g. eodem
modo probabimus partem annuli lati ortam ex rota-
tione trapez j mixti $COQD$, æqualem esse seg-
mento cono $GP R M$. Quare patet solida prædi-
cta æqualia esse inter se tam secundum totum, quam
secundum partes proportionales.

SCHO-

SCHOLIUM I.

Licet autem præsens propositio probata sit per indiuisibilia, potest tamen probari etiam modo archimedeo; quia facta constructione ut in schemate, facile patebit tubum cylindricum ODN , inscriptum in annulo, æqualem esse cylindro in cono inscripto. Si ergo diuidatur EF , bifariam, & partes bifariam, & hoc semper, & per puncta diuisionum fiant constructiones similes factæ; patebit faciliter omnes tubos cylindricos inscriptos in annulo, æquales fore omnibus cylindris in cono inscriptis. Quare cum facta hac inscriptione, tam cylindri in cono inscripti, quam tubi in annulo possint deficere à magnitudinibus in quibus inscribuntur magnitudine quacumque data minore; modo archimedeo deducetur, annulum æqualem esse cono.

SCHOLIUM II.

Ex dictis ergo in præsentī proposit. & in lib. 4. de Infin. Parab. possumus deducere, annulum prædictum, & conum GEM , esse quantitates proportionaliter annalogas tam in magnitudine, quam in grauitate, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales. Quare cum ex dictis in schol. prim. proposit. 8. eiusdem libri, conus, trilineum parabolicum quadraticum, & excessus cylindri circum-

cumscripti hemisphærio , seu hemisphæroidi sint
quatuor magnitudines proportionaliter analogæ: se-
quitur his etiam associari pro quinta magnitudine
annulum latum prædictum . Ex dictis ergo in lib. cit.
habebimus, quod centrum gravitatis talis annuli sic
secabit EF, vt pars terminata ad E, sit ad par-
tem terminatam ad F, vt 3. ad 1. Pariter si con-
siderabimus quamlibet partem eiusdem annuli re-
secti plano CL, parallelo, & terminatam ad circu-
lum

lum BEK, v.g. illam, quæ oritur ex rotatione trilinei BOQ circa EF; agnosceamus eius centrum grauitatis secare EI, in eadem ratione. Quia talis pars est proportionaliter analoga cum cono PER. Cum vero etiam pars annuli orta ex rotatione trapeziji mixti COQD, sit probata proportionaliter analoga segmento conico GPRM, & cum talis segmenti conici sit in libro cit. pluribus modis inuentum centrum grauitatis; ex dictis ibidem reperiemus in quo puncto IF, sit centrum grauitatis prædicti segmenti annuli.

SCHOLIUM III.

Sed paradoxum Galilei, de quo locuti sumus supra schol. 2. proposit. 10. possumus etiam deducere ex præsentī propositione. Nam etiam ex hac facto concinno discursu, tandem concludemus, circumferentiam BEK, extremitatem annuli, æqualem fore E, vertici coni.

PROPOSITIO XIX.

In schem. anteced. proposit. annulus strictus ex quadrilatero mixto CBEG, circa EF, est æqualis cylindro DK, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales.

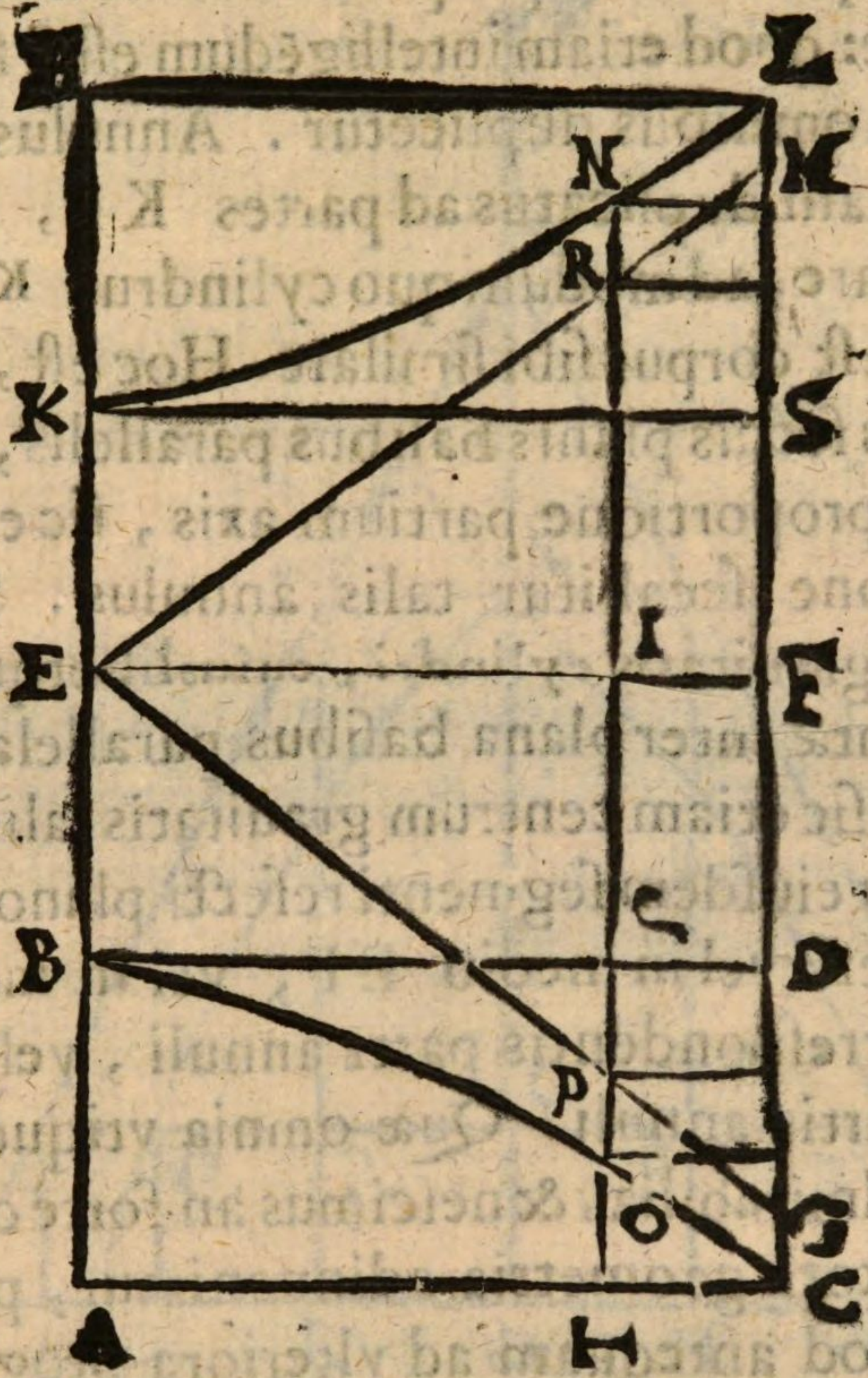
Patet faciliter. Cum enim in anteced. proposit. ostensum sit, annulum latum ex trilineo CBD,
H circa

circa EF , æqualem esse cono GEM ; ergo communi addito cylindro KD , erit solidum $CBkL$, æquale cylindro DK , & cono GEM . Quò hinc inde ablato. Ergo solidum $GCB E^kLM$, erit æquale cylindro kD .

Eodem modo ostendemus æqualitatem partium proportionalium, v. g. partem annuli ortam ex rotatione quadrilateri mixti $COPG$, æqualem esse cylindro QS . Addendo enim cylindrum QS , & auferendo $GPRM$, frustum conicum, patebit propositum.

SCHOLIUM I.

Præsens propositio potuisset immediate probari per indiuisibilia independenter ab anteced. proposit. Quia facta constructione vt in anteced. proposit. statim patebit ex proposit. 11.2. Conic. & rectangulum OPN , æquale esse quadrato BE , seu QI ; & armillam circularem OPN , æqualem pariter fore circulo cuius radius QI . Quare facile patebit & omnes armillas solidi ex quadrilatero mixto $CBE G$, æquales esse omnibus circulis cylindri kD , & ipsum annulum ex quadrilatero mixto, æqualem esse cylindro kD . Maluimus tamen hanc ex antecedenti deducere, vt pauidis geometris non relinquamus vllum locum hæsitandi de certitudine præsentis propositionis; nam adhibita præsentis constructione propositio non probatur nisi per indiuisibilia;



lia ; quia in annulo ex quadrilatero mixto $CBE G$,
nequit fieri inscriptio tuborum cylindricorum, quæ
patuit posse fieri in annulo ex trilineo mixto
 CBD .

SCHOLIUM II.

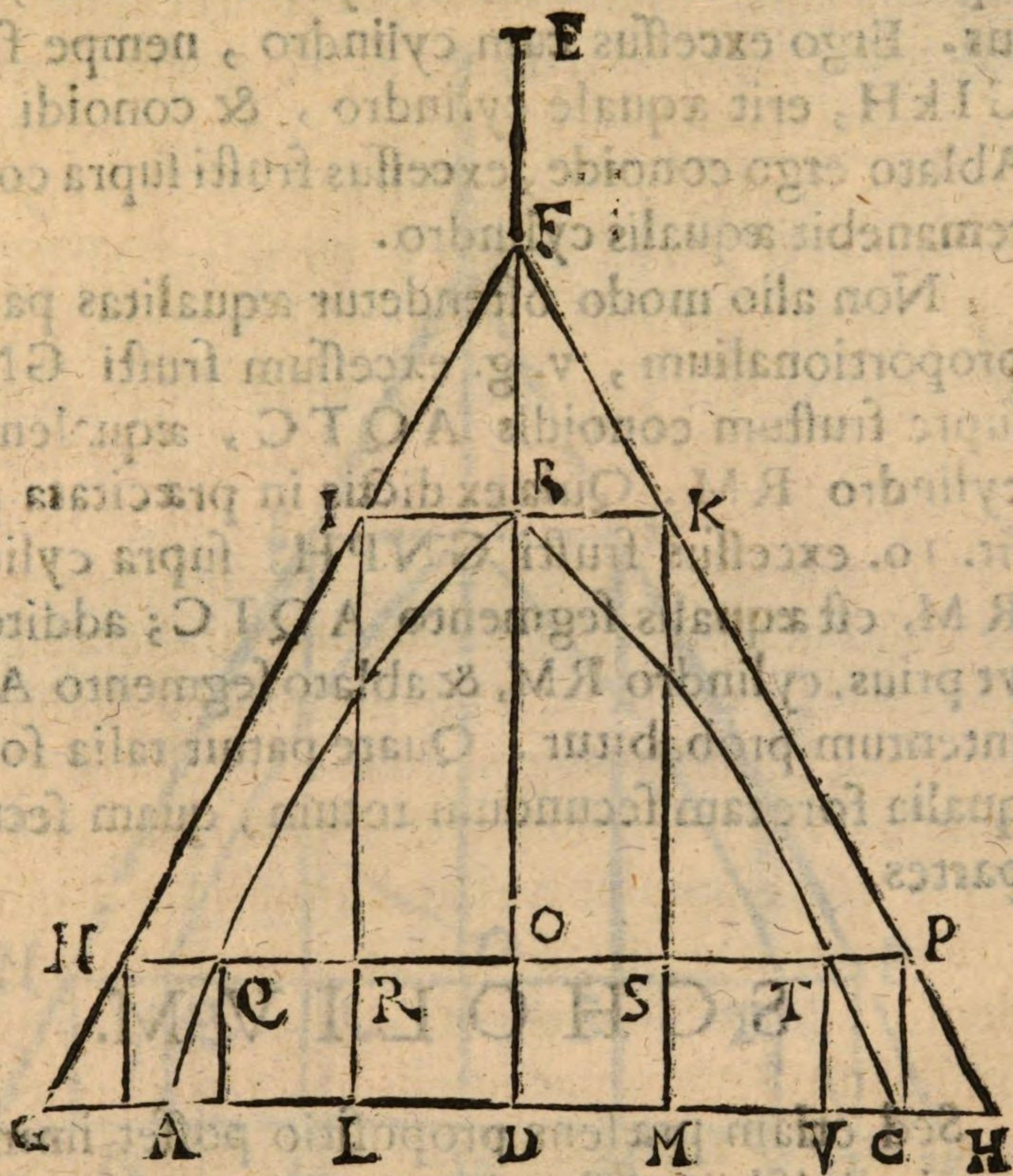
Pater ergo consequenter ad sæpe sæpius repetita,
annulu in præfatum $GCBE k L M$, & cylindrum
H 2 KD,

K D, esse quantitates proportionaliter analogas omniquaque: quod etiam intelligendum est si semihyperbola cum omnibus duplicetur. Annulus ergo prædictus etiam duplicatus ad partes K B, erit corpus sibi simile, ad modum quo cylindrus K D, sic duplicatus est corpus sibi simile. Hoc est, quod sicut cylindrus sectus planis basibus parallelis, semper secatur in proportionem partium axis, sic etiam in tali proportionem secabitur talis annulus. Sicuti ergo centrum gravitatis cylindri, cuiuslibetque eius partis contentæ inter plana basibus parallela est in medio axis; sic etiam centrum gravitatis talis annuli, & cuiuslibet eiusdem segmenti resecti plano C L, parallelo, erit vel in medio E F, vel in medio partis E F, correspondentis parti annuli, vel quæ sit altitudo partis annuli. Quæ omnia utique nobis videntur admirabilia, & nescimus an fortè corpus huic simile in tota geometria adinueniatur, præter unicum, quod antequam ad ulteriora progrediamur, intelligimus in propositione sequenti explicare.

PROPOSITIO XX.

Excessus frusti conici proposit. 10. supra conoides hyperbolicum, est æqualis cylindro super minore basi frusti, & circa diametrum cum ipso: Et hoc tam secundum totum, quam secundum partes proportionales.

Esto



ESto ergo in schem. proposit. 10. frustum coni-
cum $G I K H$, conoides hyperbolicum sit
 $A B C$, cuius asymptoti $G F$, $F H$, & sit cylin-
drus $I M$, cuius basis $I B K$, minor basis frusti.
Dico excessum frusti conici $G I k H$, supra conoi-
des $A B C$, æqua'em esse cylindro $I M$, tam se-
cundum totum, quam secundum partes proportio-
nales. De totis patet. Quia cum ex cit. proposit.
10. excessus $G I k H$, supra cylindrum $I M$, sit
æqua-

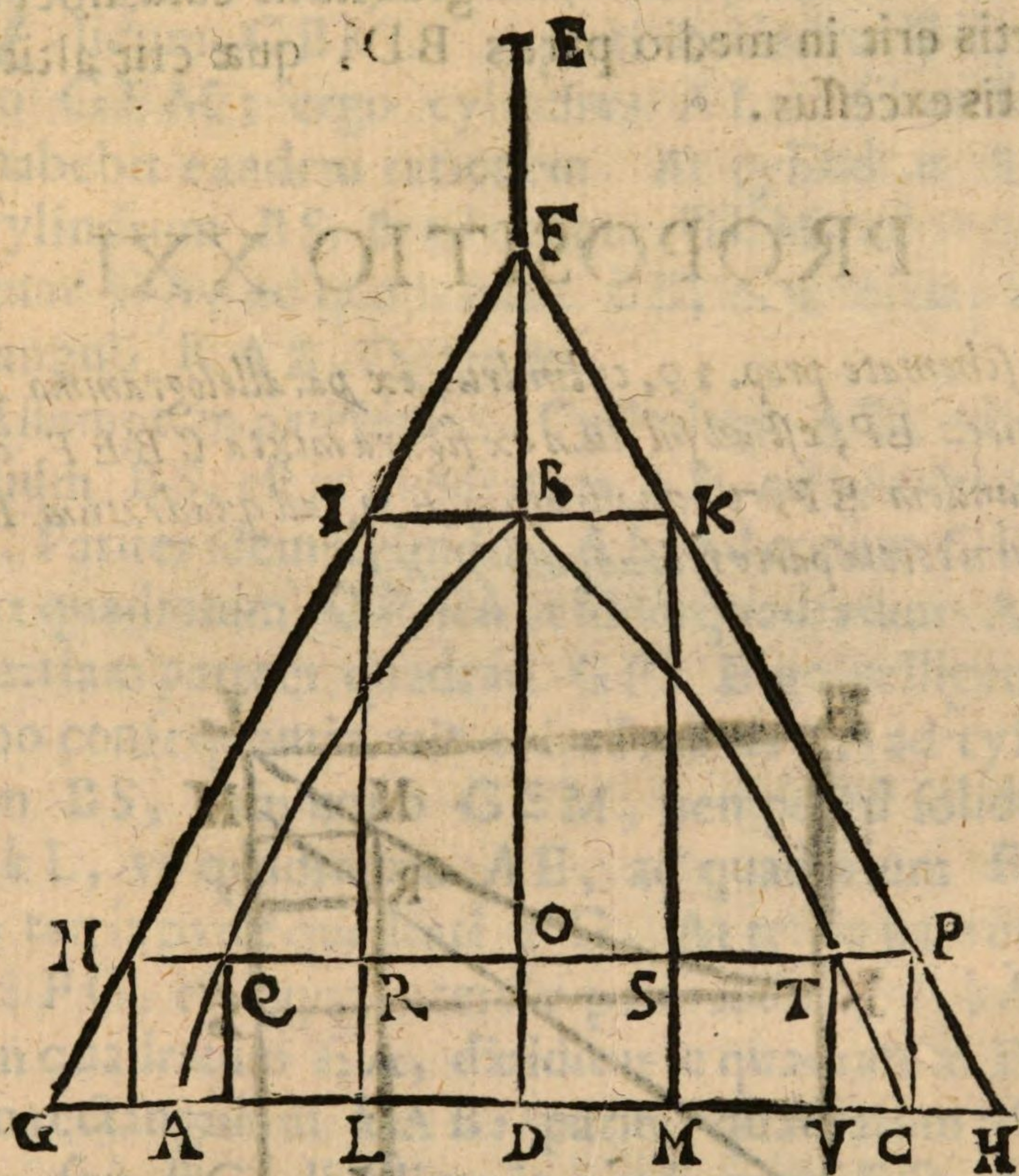
æqualis conoidi ABC ; si cylindrus IM , addatur. Ergo excessus cum cylindro, nempe frustum $G I k H$, erit æquale cylindro, & conoidi simul. Ablato ergo conoide, excessus frusti supra conoides remanebit æqualis cylindro.

Non alio modo ostendetur æqualitas partium proportionalium, v. g. excessum frusti $GNPH$, supra frustum conoidis $AQTC$, æqualem esse cylindro RM . Quia ex dictis in præcitata proposit. 10. excessus frusti $GNPH$, supra cylindrum RM , est æqualis segmento $AQTC$; addito ergo, ut prius, cylindro RM , & ablato segmento $AQTC$, intentum probabitur. Quare patuit talia solida æqualia fore tam secundum totum, quam secundum partes.

SCHOLIUM.

Sed etiam præsens propositio posset immediate per indiuisibilia ostendi. Sumpto enim arbitrariè puncto O , & acto plano NOP , GH , parallelo. Ex proposit. 10. sec. conic. rectangulum NQP , est æquale quadrato IB , seu quadrato RO . Et consequenter armilla circularis NQP , est æqualis circulo ROS : & omnes armillæ æquales omnibus s. circulis: & excessus prædictus æqualis cylindro IM . Sed hac constructione adhibita, demonstratio non reducitur ad modum Archimedum, quia in prædicto excessu nequeant inscribi tubi cylindrici.

Pater

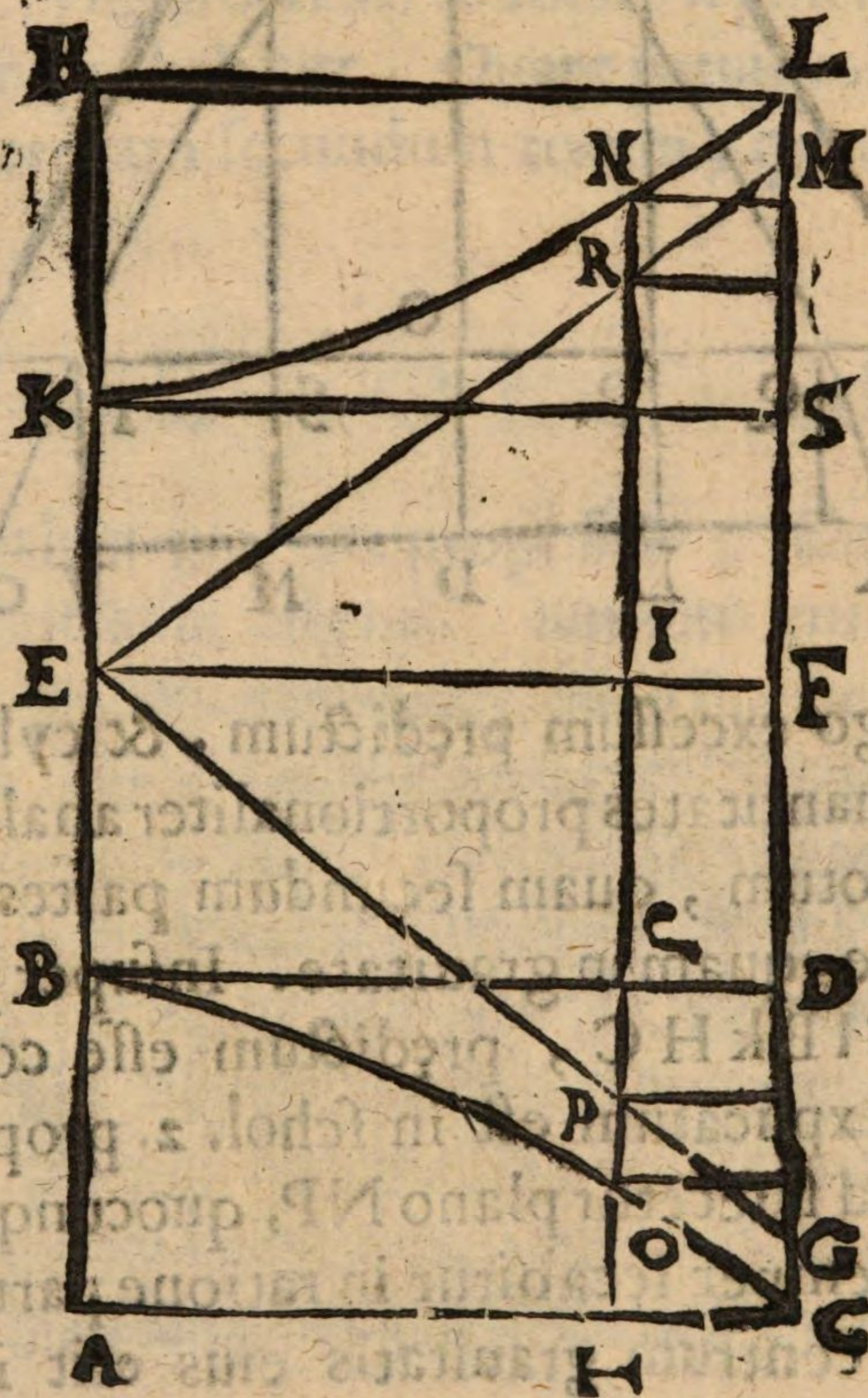


Patet ergo excessum prædictum, & cylindrum, IM, esse quantitates proportionaliter analogas tam secundum totum, quam secundum partes, tam in magnitudine, quam in gravitate. Insuper patet excessum AGLBKHC, prædictum esse corpus sibi simile ut explicatum est in schol. 2. proposit. ant. Hoc est quod si secetur plano NP, quocunque, GH, parallelo, semper secabitur in ratione partium axis DB. Item centrum gravitatis eius erit in medio DB;

64
DB; sicuti etiam centrum gravitatis cuiuslibet eius
 partis erit in medio partis **BD**, quæ erit altitudo
 partis excessus.

PROPOSITIO XXI.

*In schemate prop. 19. cylindrus ex parallelogrammo **AF**,
 circa **EF**, est ad solidum ex figura mixta **CBEF**, circa
 eandem **EF**, ut quadratum **EA**, ad quadratum **EB**,
 cum tertia parte recti anguli **KAB**.*



Quo-

Quoniam enim probatum est in proposit. 19. solidum $CBkL$, æquari cylindro BS , & cono GEM ; ergo cylindrus AL , ad hæc solida habebit eandem rationem. At cylindrus AL , ad cylindrum BS , & ad conum GEM , est vt quadratum EA , ad quadratum EB , cum tertia parte rectanguli KAB . Quare &c.

Assumptum patebit sic. Cylindrus AL , ad cylindrum BS , est vt quadratum AF , ad quadratum EB . Pariter idem cylindrus AL , ad conum GEM , est vt quadratum CF , seu vt idem quadratum AE , ad tertiam partem quadrati GF . Ergo colligendo ambo consequentia, erit cylindrus AL , ad cylindrum BS , cum cono GEM , nempe ad solidum $CBkL$, vt quadratum AE , ad quadratum EB , cum tertia parte quadrati FG . At tertia pars quadrati FG , est æqualis tertiæ parti rectanguli kAB . Nam quadratum EA , diuiditur in quadratum EB , & in rectangulum kAB : pariter quadratum idem EA , seu FC , diuiditur in quadratum FG , & in rectangulum CGL , seu MCG . Ergo quadratum EB , cum rectangulo KAB , erit æquale quadrato FG , & rectangulo MCG . Sed ex sec. conic. proposit. 11. rectangulum MCG , est æquale quadrato BE . Quare reliquum rectangulum kAB , erit æquale reliquo quadrato FG . Quare etiam illorum tertiæ partes erunt æquales. Ergo cylindrus AL , erit ad solidum $CBkL$, vt quadratum EA ,

I ad

ad quadratum EB , cum tertia parte rectanguli kAB .
Quod erat ostendendum.

His ostensis adinuenietur centrum grauitatis hyperbolæ sic.

PROPOSITIO XXII.

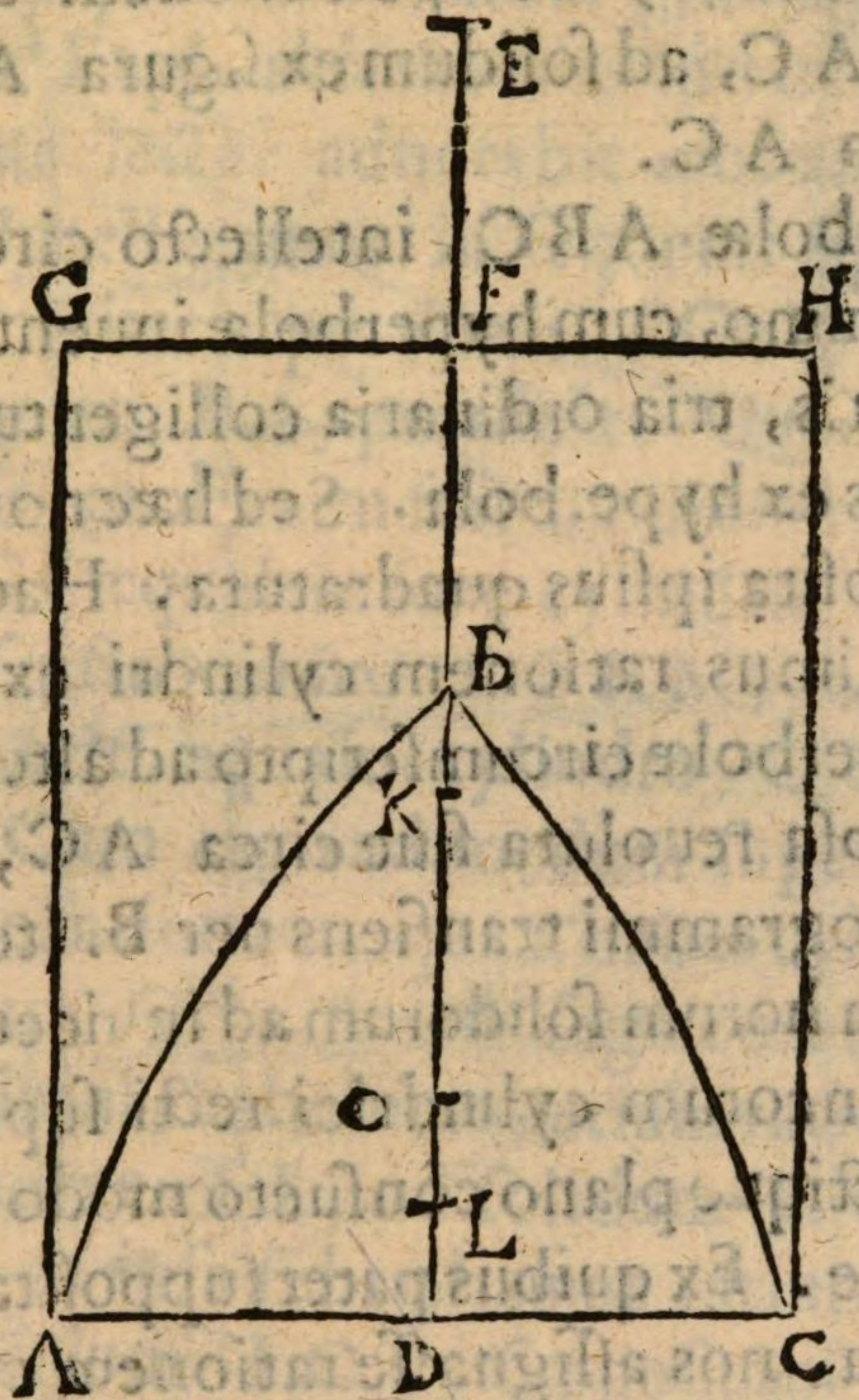
Si hyperbolæ circumscriptum parallelogrammum intelligatur productum usque ad secundam diametrum, & fiat ut quadratum compositæ ex axi hyperbolæ, & ex dimidia lateris transversi, ad quadratum dimidiæ lateris transversi cum rectangulo sub axi, & sub composita ex axi, & ex latere transverso, sic composita ex dimidia lateris transversi, & ex axi, ad aliam: item fiat ut dimidium prædicti parallelogrammi ad excessum totius parallelogrammi supra hyperbolam, sic composita ex axi, & ex dimidia lateris transversi, ad aliam: tandem fiat ut secunda inuenta ad primam inuentam, sic composita ex axi, & ex dimidia lateris transversi ad sui partem absindendam incipiendo à secunda diametro. Erit punctum quod est alter terminus huius abscissæ centrum grauitatis excessus parallelogrammi supra hyperbolam.

ESto hyperbola ABC , cuius axis BD ; latus transversum BE ; centrum F ; secunda diameter GH ; & GC , sit parallelogrammum: fiat ut quadratum FD , ad quadratum FB , cum tertia parte

pe ex constructione, vt DF , ad FO ; & ratio DF , ad FO (de foris sumpta FL) componitur ex ratione DF , ad FL , & huius ad FO . Ergo etiam ratio cylindri prædicti ex GC , ad solidum ex excessu GC , supra hyperbolam componetur ex iisdem rationibus. At ex schol. prim. proposit. 3. lib. 3. ratio prædicti cylindri ad antedictum solidum componitur etiam ex ratione parallelogrammi GD , ad figuram $AGHCB$, & ex ratione DF , ad interceptam inter F , & centrum grauitatis figure $AGHCB$. Ergo etiam rationes DF , ad FL , & FL , ad FO , erunt æquales rationibus GD , ad $AGHCB$, & DF , ad prædictam interceptam. Sed ex constructione, rationes GD , ad $AGHCB$, & DF , ad FL , sunt æquales. Ergo si hæ rationes auferantur à prædictis, etiam reliquæ erunt æquales. Ergo ratio LF , ad FO , erit æqualis rationi DF , ad interceptam prædictam. Sed factum fuit supra vt LF , ad FO , sic DF , ad Fk . Ergo k , erit centrum grauitatis figure $AGHCB$. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM I.

Inuento autem centro prædicto, facile erit etiam centrum grauitatis hyperbolæ reperire. Si enim supponamus FD , sectam bifariam in O , & supponamus k , esse centrum grauitatis figure $AGHCB$, si fiat vt ABC , ad $AGHCB$, sic reciprocè kO ,
ad



ad **OL**. Erit ex doctrinis Archimedis, **L**, centrum
grauitatis hyperbolæ.

Sed etiam in præsentī est adnotandum, posse
colligi tria solita. Nempe rationem solidorum ex
AGHC, figura reuoluta & circa **GH**, & circa
AC, ad inuicem. Cubationem truncorum cylindrici
recti super ipsa figura existentis, resecti plano diago-
naliter transeunte per **GH**, & per **AC**, parallelam. Ast
cubatio trunci finistri habetur sine suppositione qua-
draturæ hyperbolæ, sed cubatio trunci dexteri non
habetur

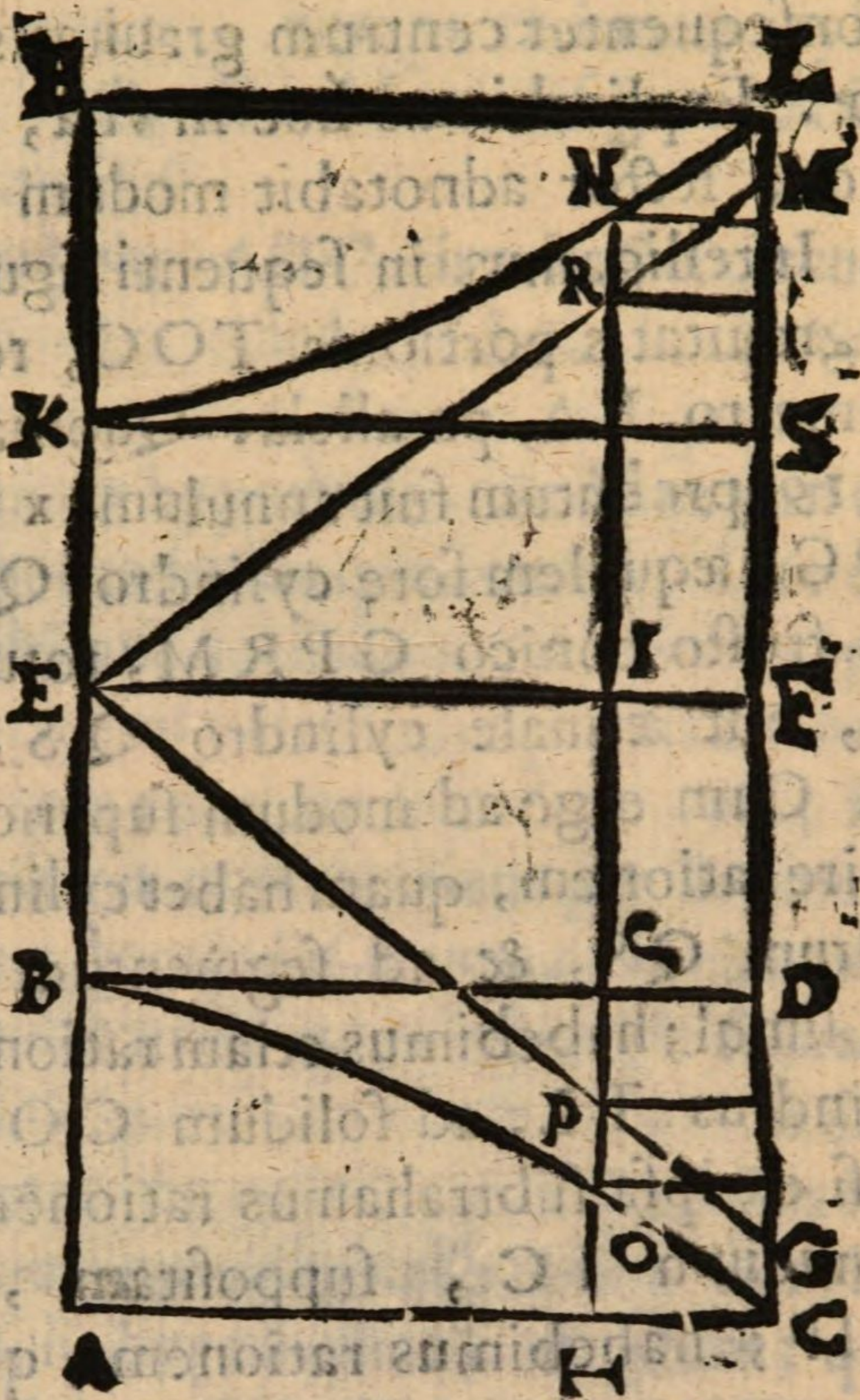
habetur sine tali quadratura; sine qua non habemus nec etiam tertium, nempe rationem cylindri ex GC , circa AC , ad solidum ex figura $AGHCB$, circa eandem AC .

Sed hyperbolæ ABC , intellecto circumscripto parallelogrammo, cum hyperbolæ inuentum sit centrum grauitatis, tria ordinaria colligentur etiam in solidis genitis ex hyperbola. Sed hæc non colligentur nisi supposita ipsius quadratura. Hac ergo supposita habebimus rationem cylindri ex parallelogrammo hyperbolæ circumscripto ad alterutrum solidorum ex ipsa reuoluta siue circa AC , siue circa latus parallelogrammi transiens per B . Item habebimus rationem horum solidorum ad inuicem. Et cubationem truncorum cylindrici recti supra ipsa existentis, resectique plano consueto modo diagonaliter transeunte. Ex quibus patet supposita hyperbolæ quadratura, nos assignasse rationem cylindri circumscripti fuso hyperbolico, ad ipsum; quod pariter alio modo præstitit Bonauentura Caualerius in exercit. 4. proposit. 35.

SCHOLIVM II.

Repertum est ergo centrum grauitatis hyperbolæ, supposita ipsius quadratura, quod nullus (quod sciamus) ante nos tentauit. Sed non modo licet reperire hoc, sed etiam possumus assignare centrum æquilibrij cuiuscunque eius partis constitutæ ex sectione

&ione hyperbolæ linea, vel lineis diametro paralle-
 lis; & consequenter centrum gravitatis talis partis
 duplicatæ. Explicabimus hoc in vna, ex huiusque
 explicatione lector adnotabit modum in alijs exer-
 cendum. Intelligamus in sequenti figura reperire
 centrum gravitatis portionis TOC , resectæ linea
 TO , diametro BA , parallela. Quoniam supra in
 proposit. 19. probatum fuit annulum ex figura mix-
 ta $COPG$, æqualem fore cylindro QS ; commu-
 ni addito frusto conico $GPRM$, totum solidum
 $CONL$, erit æquale cylindro QS , & frusto
 $GPRM$. Cum ergo ad modum superiorum possi-
 mus reperire rationem, quam habet cylindrus TL ,
 ad cylindrum QS , & ad segmentum conicum
 $GPRM$, simul; habebimus etiam rationem, quam
 habet cylindrus TL , ad solidum $CONL$. Hac
 habita, si ex ipsa subtrahamus rationem, quam
 habet dimidium IC , suppositam, ad figu-
 ram $COIF$; habebimus rationem, quam habet
 TI , ad interceptam inter I , & centrum æquilibrij
 figuræ $COIF$, in IT . Et consequenter facile re-
 periemus centrum æquilibrij talis figuræ. Hoc in-
 uento reperietur etiam centrum æquilibrij portionis
 hyperbolæ TOC , in TO ; & consequenter cen-
 trum gravitatis duplicatæ TOC , ad partes TO .
 Ex quibus postea reliqua solita deduci, colligeren-
 tur. Hęc ergo, & similia liceret reperire. Ex qui-
 bus paterent ea omnia, quę ostendit Caualerius in
 loc. cit. proposit. 36. & multo plura. Sed quia hęc
 non



non reperiuntur nisi ex supposita quadratura, ideo
 reliquuntur. Sufficit enim nobis lectori indicare
 hæc nequaquam ignorari à nobis. Sicuti sufficiet ip-
 si indicare nos posse habere centra gravitatis om-
 nium cylindricorum existentium super hyperbola, &
 super omnibus ipsius partibus, quarum invenitur
 centrum gravitatis. Erit enim in medio lineæ iun-
 gentis centra gravitatis oppositarum basium. Reli-
 ctis

Etis ergo his, transeamus ad quadrandam parabolam
duobus nouis modis.

PROPOSITIO XXIII.

*Si semihyperbola cum sibi circumscripto parallelogrammo ro-
tetur circa secundam diametrum. Tubus cylindricus
ex parallelogrammo, erit sesquialter annuli lati ex se-
mihyperbola.*

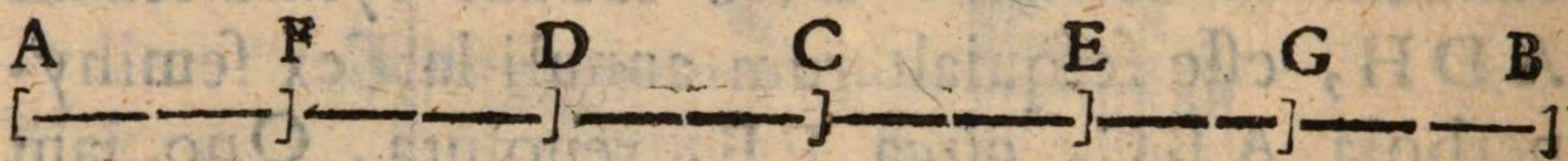
SEmihyperbola ABC , cum sibi circumscripto
parallelogrammo AD , rotetur circa EF , se-
cundam diametrum. Dico tubum cylindricum
 ADH , esse sesquialterum annuli lati ex semihy-
perbola ABC , circa EF , reuoluta. Quoniam
tubus $CBSH$, est ad cylindrum AL , vt rectan-
gulum HBA , ad quadratum EA ; nempe vt re-
ctangulum kAB , ad idem quadratum EA ; & cy-
lindrus AL , probatus est esse in proposit. 21. ad so-
lidum $CBkL$, vt quadratum EA , ad quadratum
 EB , cum tertia parte rectanguli kAB ; vnde per
conuersionem rationis, est idem cylindrus AL , ad
annulum ex semihyperbola ABC , circa EF , vt
idem quadratum EA , ad excessum ipsius supra
quadratum EB , & supra tertiam partem rectanguli
 kAB ; ergo ex æquali, erit tubus cylindricus $ADkL$,
ad talem annulum latum, vt rectangulum ABH , ad
prædictum excessum. Sed quadratum EA , cum sit
æquale quadrato EB , & rectangulo kAB , excedit

K illa

illa plana duobus tertijs rectanguli $k A B$. Ergo tubus cylindricus $A D K L$, erit ad prædictum annulum, vt rectangulum $K A B$, ad duo tertia eiusdem rectanguli; nempe in ratione sesquialtera. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXIV.

Si recta linea $A B$, secetur in C , bifariam, & in D , E , æque remotè à C , eodemque modo in F , G . Rectangulum $A G B$, erit excessus rectanguli $A E B$, supra rectangulum $F E G$.



Nam rectangulum $A E B$, diuiditur in rectangulum $A E G$, & in rectangulum $A E$, $G B$. Pariter rectangulum $A E G$, diuiditur in rectangulum $F E G$, & in rectangulum $A F$, $E G$, seu $B G E$, quia $A F$, ex hypothesi, est æqualis $G B$. Ergo excessus rectanguli $A E B$, supra rectangulum $F E G$, est rectangulum $A E$, $G B$, cum rectangulo $E G B$; quæ duo rectangula sunt æqualia rectangulo $A G B$. Quare patet propositum.

PROPOSITIO XXV.

Si in oppositis sectionibus, quæ hyperbolæ appellantur distantur lineæ lateri transuerso parallelæ, occurrentes æquali-

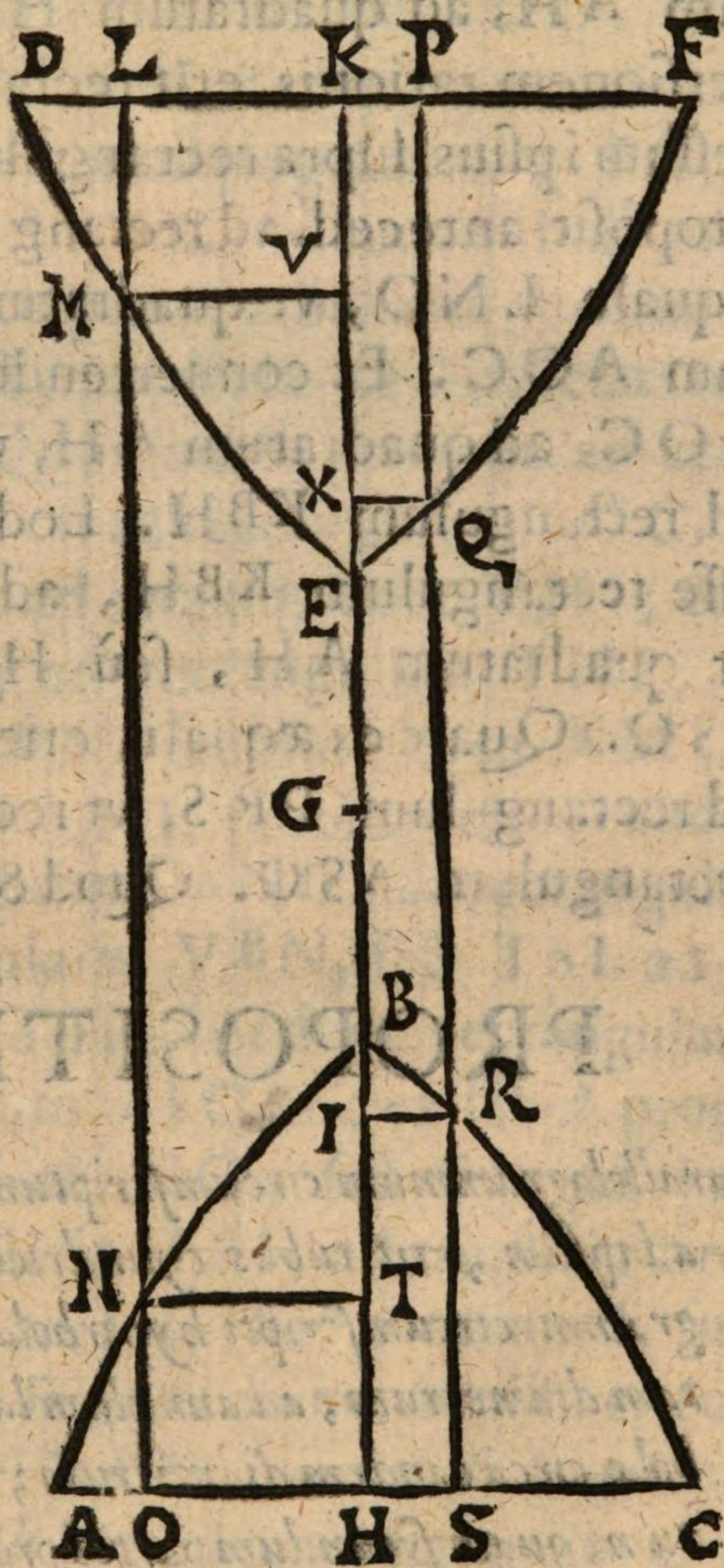
*æqualibus ad diametros applicatis in ambabus hyper-
bolis. Rectangula sub partibus ipsarum resectarum ab
eadem curua hyperbolæ erunt ad inuicem, ut rectan-
gula sub partibus ordinatim applicatæ ab ipsis sectæ.*

Sint oppositæ se-
ctiones hyper-
bolæ ABC , DEF ,
quarum latus trans-
uersum EB , & DF ,
 AC , sint æquales or-
dinatim applicatæ ad
æquales diametros
 KE , BH , & sint du-
ctæ LO , PS , paral-
læ kH . Dico re-
ctangulum LNO , ef-
se ad rectangulum
 PRS , vt rectangu-
lum AOC , ad re-
ctangulum ASC .

Applicentur à punctis
 N , R , NT , RI , ordi-
natim ad diametrum;
item à punctis M , Q
ordinatim applicen-
tur ad KE , MV , QX .

Quoniam enim ex
prim. conic. proposit. 21. rectangulum EHB , ad

k 2 rectan-



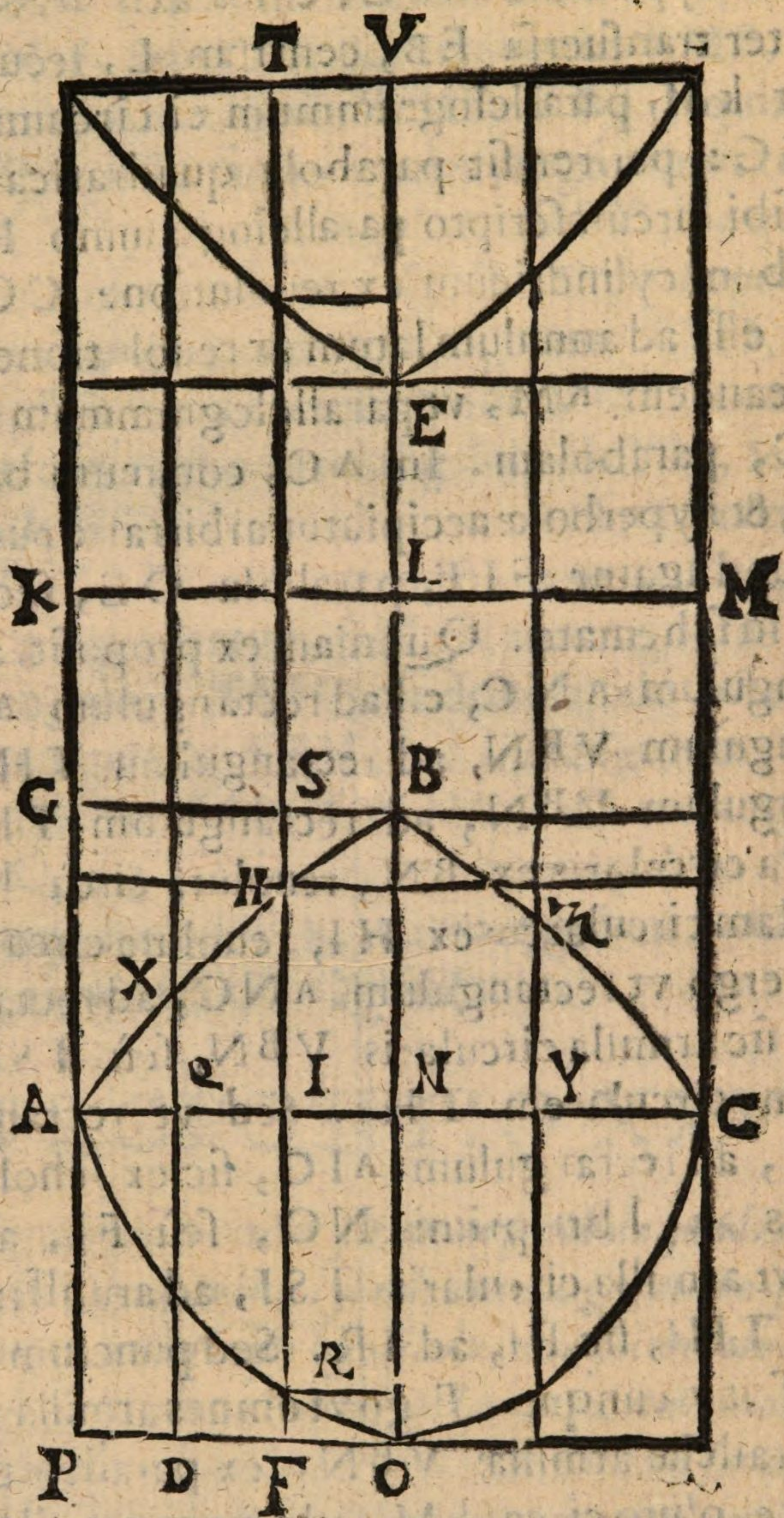
rectangulum ETB , est vt quadratum AH , ad qua-
 dratum NT , seu OH ; & rectangulis EBH , EIB ,
 sunt æqualia rectangula KBH , VBT , quia kE ,
 BH , & VE , BT , sunt æquales; ergo erit vt rectan-
 gulum KBH , ad rectangulum VBT , sic quadra-
 tum AH , ad quadratum HO . Ergo & per con-
 uersionem rationis, erit rectangulum KBH , ad ex-
 cessum ipsius supra rectangulum VBT ; nempe ex
 proposit. anteced. ad rectangulum kTH , seu ad ei
 æquale LNO , vt quadratum AH , ad rectangu-
 lum AOC . Et conuertendo, erit rectangulum
 AOC , ad quadratum AH , vt rectangulum LNO ,
 ad rectangulum KBH . Eodem modo ostendetur
 esse rectangulum KBH , ad rectangulum PRS ,
 vt quadratum AH , seu HC , ad rectangulum
 ASC . Quare ex æquali, erit rectangulum LNO ,
 ad rectangulum PRS , vt rectangulum AOC , ad
 rectangulum ASC . Quod &c.

PROPOSITIO XXVI.

*Parallelogrammum circumscriptum parabole quadratice, est
 ad ipsam, vt tubus cylindricus ex gyratione parallelo-
 grammi circumscripti hyperbolæ circa secundam coniuga-
 tam diametrum, ad annulum latum ex reuolutione hyper-
 bolæ circa eandem diametrum; & hoc tam secundum to-
 tum, quam secundum partes proportionales; dummodo ba-
 ses parabole, & hyperbolæ genitricis annuli proportiona-
 liter fiantur.*

Esto

Esto hyperbola ABC , cuius axis BN diame-
 ter transuersa EB , centrum L , secunda dia-
 meter kM , parallelogrammum ei circumscriptum
 sit GC : pariter sit parabola quadratica AOC ,
 cum sibi circumscripto parallelogrammo PC . Di-
 co tubum cylindricum ex reuolutione CG , circa
 kM , esse ad annulum latum ex reuolutione ABC ,
 circa eandem KM , vt parallelogrammum PC , ad
 AOC , parabolam. In AC , communi basi para-
 bolæ, & hyperbolæ accipiatur arbitrariè punctum I ,
 per quod agatur FI , parallela OE , secans om-
 nia vt in schemate. Quoniam ex proposit. anteced.
 rectangulum ANC , est ad rectangulum AIC , vt
 rectangulum VBN , ad rectangulum THI ; & vt
 rectangulum VBN , ad rectangulum THI , sic
 armilla circularis ex BN , reuoluta circa KM , ad
 armillam circula rem ex HI , reuoluta circa eandem
 KM ; ergo vt rectangulum ANC , ad rectangulum
 AIC , sic armilla circularis VBN , seu TSI , ad ar-
 millam circula rem THI . Sed vt rectangulum
 ANC , ad rectangulum AIC , sic ex schol. propo-
 sitionis 22. libri primi NO , seu FI , ad IR .
 Ergo vt armilla circularis TSI , ad armillam circu-
 larem THI , sic FI , ad IR . Sed punctum I , sum-
 ptum fuit vt cunque. Ergo vt omnes armillæ circu-
 lares parallelæ armillæ VBN , ex parallelogrammo
 GC , reuoluto circa kM , ad omnes armillas circu-
 lares parallelas eidem VBN , ex hyperbola ABC ,
 reuoluta circa eandem kM , sic omnes lineæ paralle-
 logram-



logrammi PC , parallelæ NO , ad omnes lineas pa-
rabolæ AOC , parallelas eidem ON . Nempe ut
tubus

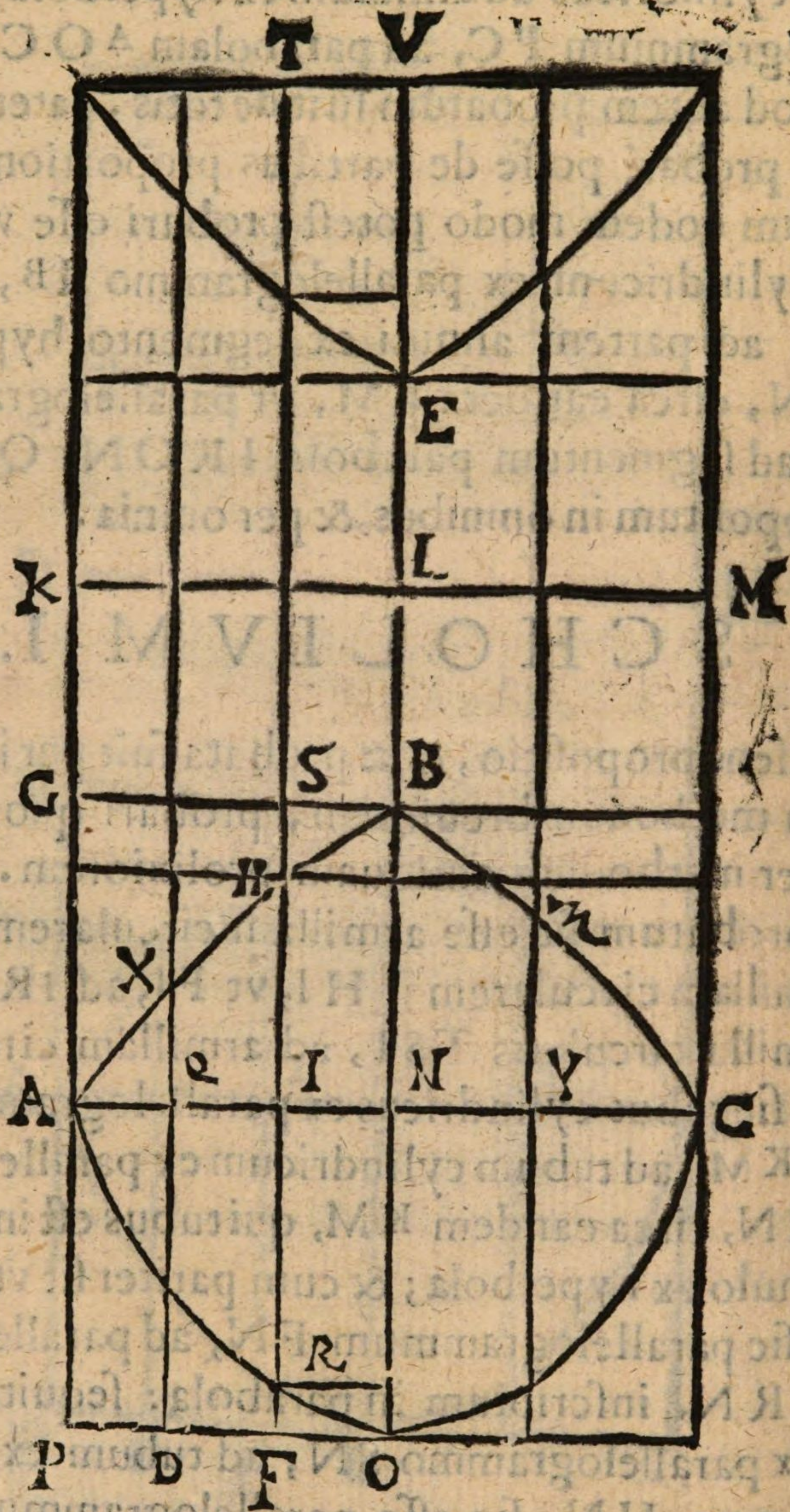
79

tubus cylindricus ad annulum ex hyperbola, sic parallelogrammum PC , ad parabolam AOC .

Quod autem probatum fuit de totis, patet eodem modo probari posse de partibus proportionalibus; nimirum eodem modo potest probari esse v. g. tubum cylindricum ex parallelogrammo IB , circa KM , ad partem annuli ex segmento hyperbolæ $IHB N$, circa eandem KM , ut parallelogrammum FN , ad segmentum parabolæ $IRON$. Quare patet propositum in omnibus, & per omnia.

SCHOLIUM I.

Præsens propositio, quæ probata fuit per indivisibilium methodum breviorē, probari quoque potest per methodum antiquam prolixiorē. Nam cum probatum sit esse armillam circularem TSI , ad armillam circularem THI , ut FI , ad IR ; & cum sit armilla circularis TSI , ad armillam circularem THI , sic tubus cylindricus ex parallelogrammo SN , circa KM , ad tubum cylindricum ex parallelogrammo HN , circa eandem KM , qui tubus est inscriptus in annulo ex hyperbola; & cum pariter sit ut F , ad IR , sic parallelogrammum FN , ad parallelogrammum $R N$, inscriptum in parabola: sequitur ut tubus ex parallelogrammo SN , ad tubum ex parallelogrammo HN , sic esse parallelogrammum FN , ad parallelogrammum $R N$. Quare si AN , v. g. bissecaretur, & hoc idem fieret de eiusdem partibus, & in



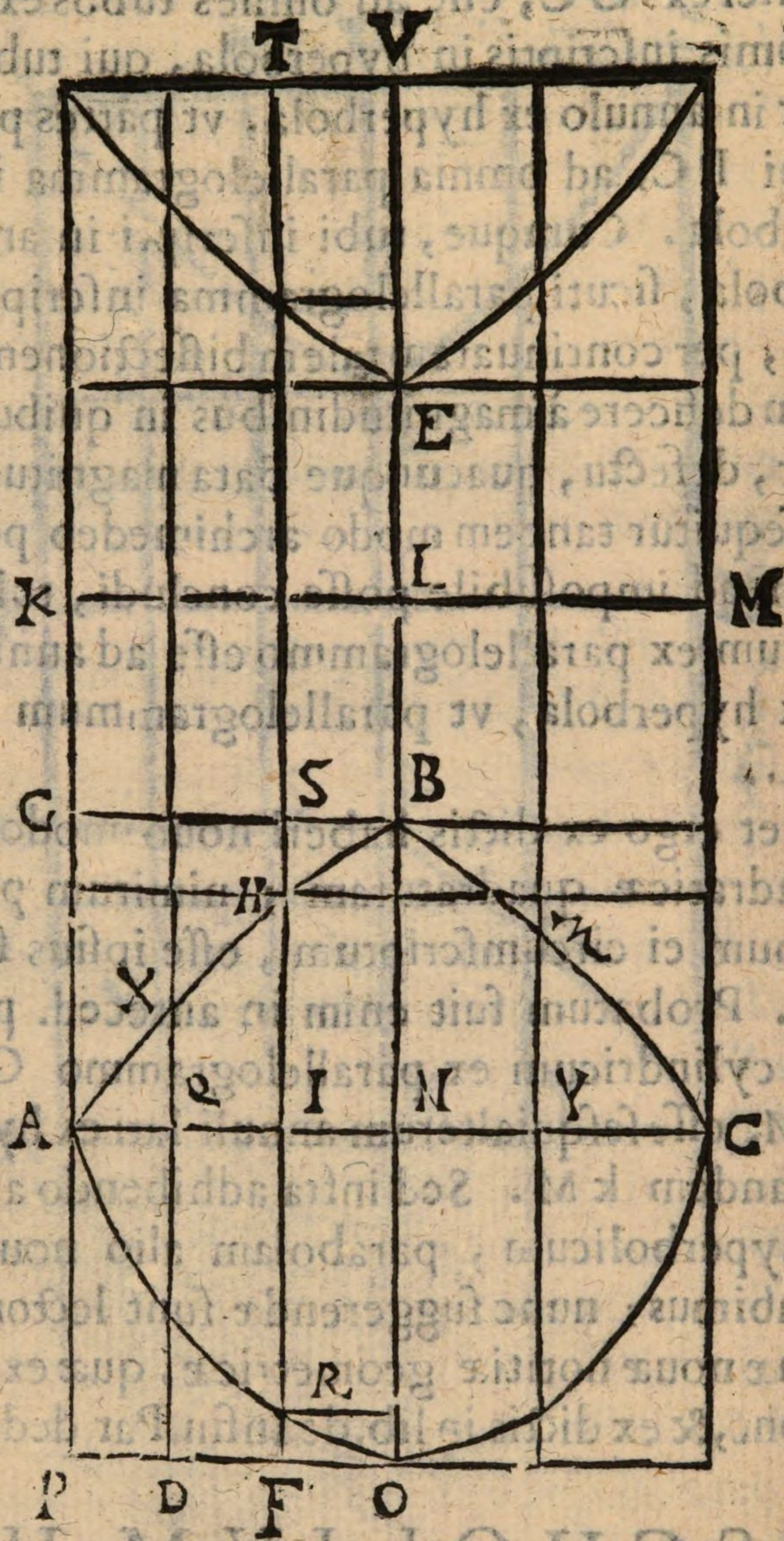
& in hyperbola, & parabola inscriberentur patallelogramma; eodem modo probaremus. partes tubi
cylind-

cylindrici ex GC , esse ad omnes tubos ex parallelogrammis inscriptis in hyperbola, qui tubi inscribuntur in annulo ex hyperbola, ut partes parallelogrammi PC , ad omnia parallelogramma inscripta in parabola. Cumque, tubi inscripti in annulo ex hyperbola, sicuti parallelogramma inscripta in parabola, per continuatam talem bisectionem possint tandem deficere à magnitudinibus in quibus inscribuntur, defectu, quacunque data magnitudine minori: sequitur tandem modo archimedeo per deductionem ad impossibile posse concludi, tubum cylindricum ex parallelogrammo esse ad annulum latum ex hyperbola, ut parallelogrammum ad parabolam..

Patet ergo ex dictis haberi nouo modo parabolæ quadraticæ quadraturam; nimirum parallelogrammum ei circumscriptum, esse ipsius sesquialterum. Probatum fuit enim in anteced. proposit. tubum cylindricum ex parallelogrammo GC , circa kM , esse sesquialterum annuli lati ex hyperbola circa eandem kM . Sed infra adhibendo aliud solidum hyperbolicum, parabolam alio nouo modo quadrabimus; nunc suggerendæ sunt lectori quamplurimæ nouæ notitiæ geometricæ, quæ ex hac propositione, & ex dictis in lib. de Infin. Par. deducuntur.

SCHOLIUM II.

Deducitur ergo ex dictis, & ad modum superiorum,

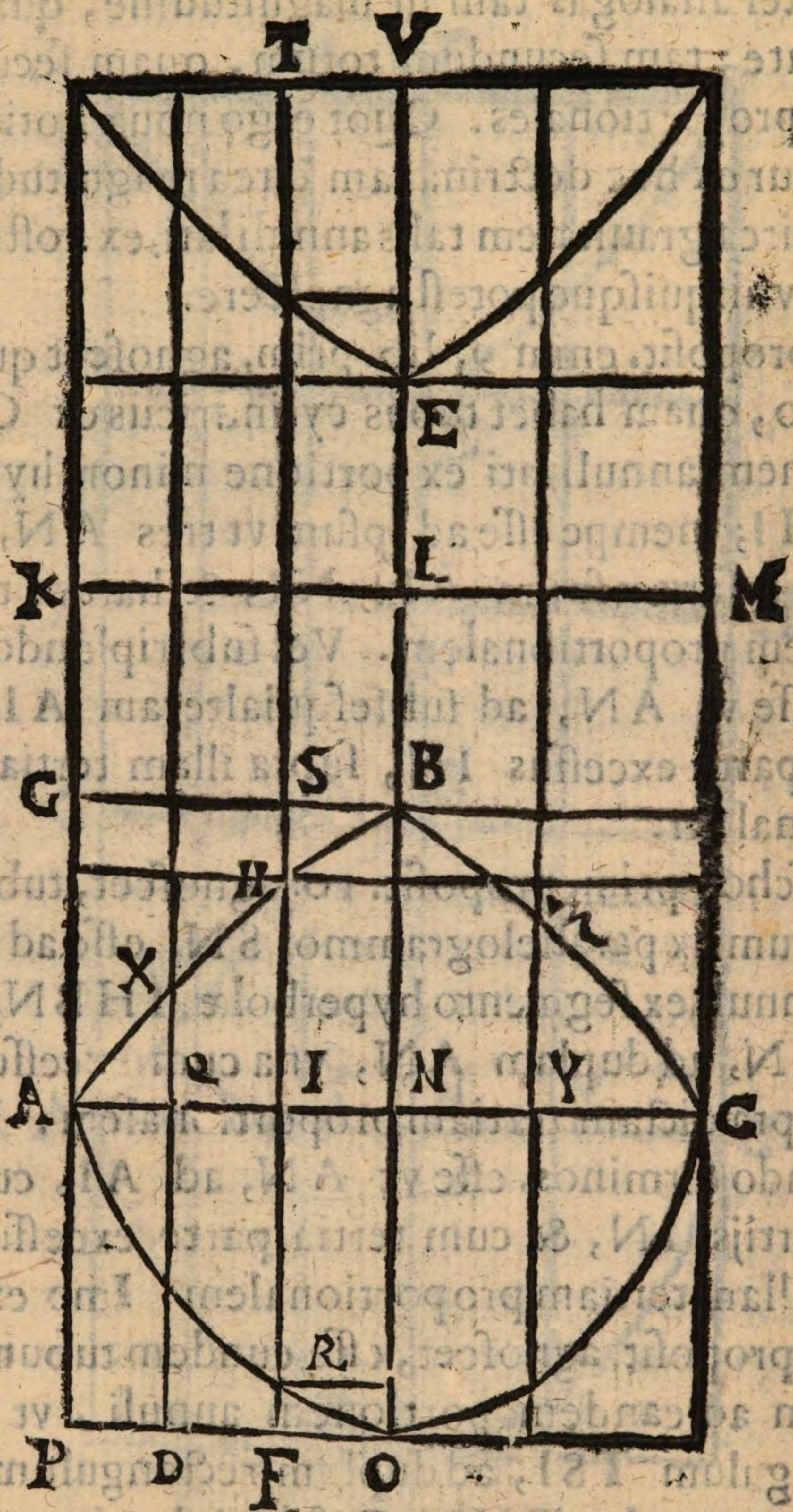


rum, parabolam AOC , & annulum latum prædictum ex hyperbola ABC , esse quantitates proportion-

tionaliter analogas tam in magnitudine, quam in grauitate; tam secundum totum, quam secundum partes proportionales. Quot ergo nouæ notitiæ deducantur ex hac doctrina tam circa magnitudinem, quam circa grauitatem talis annuli lati, ex nostro opere cit. vnusquisque potest agnoscere.

Ex proposit. enim 9, lib. prim. agnoscat quænam sit ratio, quam habet tubus cylindricus ex GI , ad portionem annuli lati ex portione minori hyperbolæ AHI ; nempe esse ad ipsum vt tres AN , ad excessum ipsarum supra AN , NI , & harum tertiam minorem proportionalem. Vel subtriplando terminos, esse vt AN , ad subsesquialteram AI , cum tertia parte excessus IN , supra illam tertiam proportionalem.

Ex schol. prim. proposit. 10. agnoscat, tubum cylindricum ex parallelogrammo SN , esse ad portionem annuli ex segmento hyperbolæ IHB , vt tripla AN , ad duplam AN , vna cum excessu ipsius supra prædictam tertiam proportionalem. Et subtriplando terminos, esse vt AN , ad AI , cum duobus tertijs IN , & cum tertia parte excessus IN , supra illam tertiam proportionalem. Imo ex schol. 3. cit. proposit. agnoscat, esse eundem tubum cylindricum ad eandem portionem annuli, vt triplum rectangulum TSI , ad duplum rectangulum TSI , cum rectangulo THI . Et subtriplando terminos, vt rectangulum TSI , ad subsesquialterum ipsius, cum tertia parte rectanguli THI .



Ex schol. prim. proposit. 12. agnoscer rationem
tubi cylindrici ex parallelogrammo SQ, ad seg-
men-

mentum annuli ex segmento intermedio semihyperbolæ $QXH I$.

Ex schol prim. proposit. 13. agnoscat rationem tubi ex parallelogrammo SC , ad portionem annuli ex portione maiori hyperbolæ $I H B C$.

Ex schol. proposit. 14. agnoscat rationem, quam habet tubus cylindricus ex parallelogrammo SY , ad segmentum annuli ex segmento intermedio $I H B Z Y$, intercipientem axim BN .

Sed portioni minori hyperbolæ AHI , intellecto circumscripto parallelogrammo HA , agnoscat ex proposit. 15. tubum cylindricum ex parallelogrammo HA , esse ad portionem annuli ex portione AHI , ut tripla AN , cum tripla NI , ad duplam AN , cum vnica NI . Imo ex schol. eiusdem proposit. agnoscat, tubum prædictum esse ad prædictam annuli portionem, ut IC ad dimidiam IC , cum sexta parte IA .

Ex scholio proposit. 17. agnoscat rationem tubi cylindrici ex parallelogrammo HC , ad portionem annuli ex portione maiori $I H B C$. Ex eodem schol. etiam agnoscat talem rationem esse, ut est AI , ad dimidiam AI , cum sexta parte IC . Quare agnoscat vniuersaliter, quod tubus cylindricus ex altero parallelogrammorum HA , HC , ad portionem annuli sibi correspondentem esse, ut basis reliquæ portionis hyperbolæ, ad sui dimidiam, cum sexta parte basis portionis reuolutæ.

Ex proposit. 18. agnoscat rationem tubi ex parallelo-

lelogrammo HQ , circumscripto segmento intermedio QXI , ad segmentum annuli ex tali segmento intermedio.

Tandem ex schol. proposit. 20. agnoscat rationem segmenti annuli ex segmento IHN , ad portionem annuli ex portione IAH . Quia agnita, non ignorabit rationem portionis annuli ex portione IHC , ad prædictam portionem annuli ex portione AHI .

SCHOLIUM III.

Pariter, cum ut diximus, prædictus annulus latus ex hyperbola sit quantitas proportionaliter analoga etiam in gravitate cum parabola quadratica; ex lib. 3. de Inf. Parab. agnoscat lector centrum gravitatis quamplurimum segmentorum prædicti annuli lati.

Ex schol. ergo 2. proposit. 2. agnoscat centrum gravitatis annuli ex semihyperbola ABN , sic secare kL , ut pars terminata ad k , sit ad partem terminatam ad L , ut 5. ad 3.

Ex schol. pri. proposit. 14. agnoscat centrum gravitatis in KL , portionis annuli ex portione minori AHI .

Ex schol. prim. proposit. 16. agnoscat centrum gravitatis segmenti annuli ex segmento IHN . Hoc autem centrum etiam alio modo agnoscat ex dictis in calce eiusdem scholij.

Ex schol. prim. proposit. 17. agnoscat modum reperiendi

periendi centrum grauitatis segmenti annuli ex segmento intermedio $QXH I$. Quod etiam inueniet alio modo expresso in eodem schol. o.

Ex schol. proposit. 19. agnosceret modum reperiendi centrum grauitatis portionis annuli ex portione maiori $I H B C$.

Tandem ex schol. proposit. 21. agnosceret modum reperiendi centrum grauitatis segmenti intermedij annuli ex segmento intermedio $I H B Z Y$, intercipiente axim $B N$.

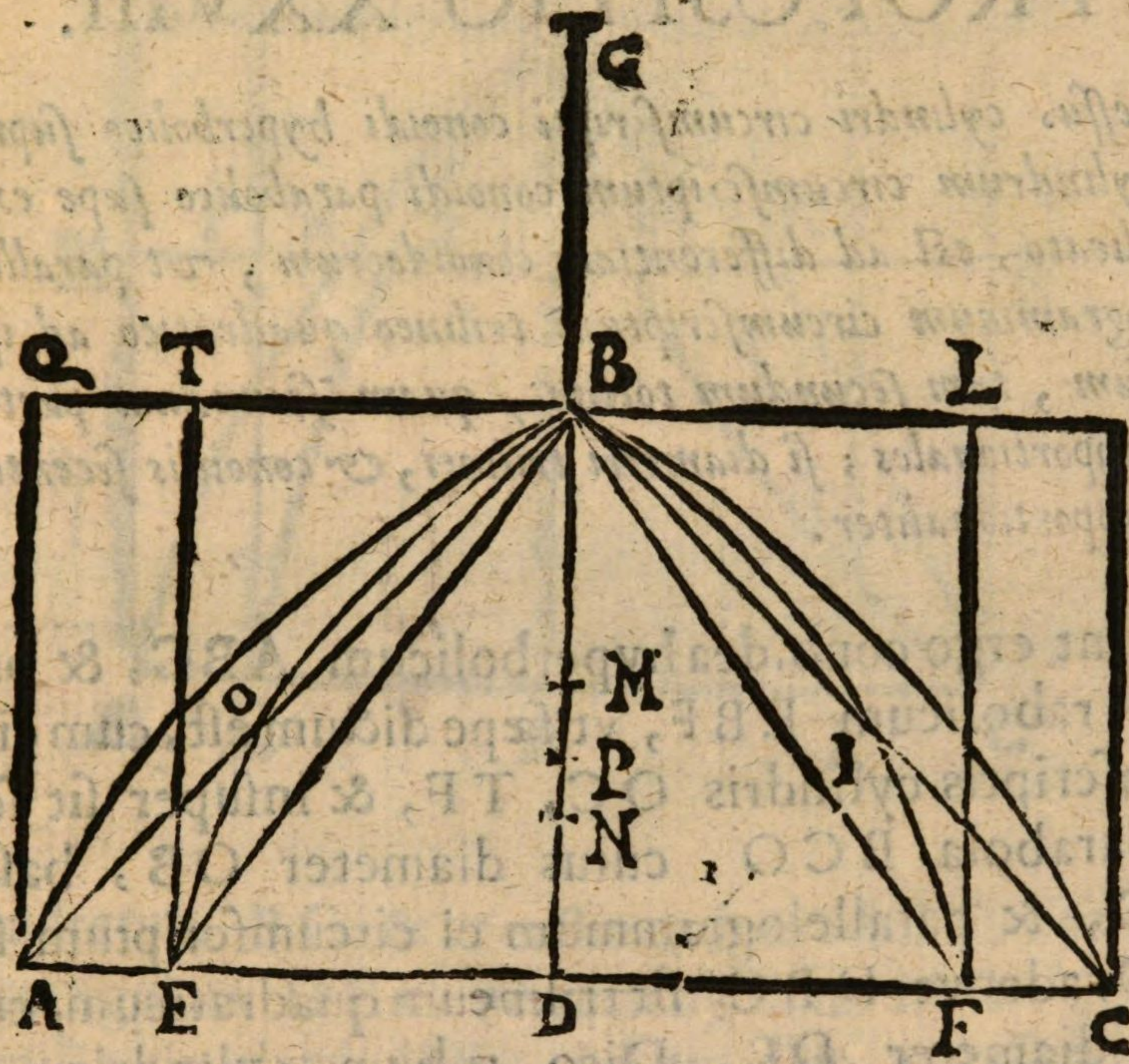
Hæ ergo sunt notitiæ geometricæ, quæ deducuntur ex anteced. proposit. Quibus addenda est Quod cum notatum sit in schol. prim. proposit. 8. lib. 4. Parabolam, sphaeram, sphæroides, & excessum cylindri supra duos conos inuersè positos, quorum bases oppositæ bases cylindri, vertex verò medium punctum axis, esse magnitudines proportionaliter analogas tam in magnitudine, quam in grauitate; sequi ex dictis, his associari annulum prædictum ex hyperbola.

PROPOSITIO XXVII.

In schemata proposit. quinta, excessus cylindri circumscripti conoidi hyperbolico supra cylindrum circumscriptum conoidi parabolico, erit triplus excessus conoidis hyperbolici supra conoides parabolicum.

Conoi.

Conoidibus hyperbolico ABC , & parabolico EBF , sint circumscripti cylindri QC , TF . Dico tubum cylindricum $QELC$, triplum esse excessus conoidis ABC , supra conoides EBF . Quoniam enim cylindrus QC , est ad cylindrum TF , ut quadratum AD , ad quadratum DE ; nempe ex hypothesi, ut DG , ad GB ; ergo per conuersionem rationis & conuertendo, erit tubus cylindricus $QELC$, ad cylindrum QC , ut BD , ad DG . Sed ex proposit. 5. 7. & 11. cylindrus QC , est ad conoides ABC , ut DG , ad dimidium GB , cum tertia parte DB : ergo ex æquali, erit tubus $QELC$, ad conoides ABC , ut DB , ad dimidiam GB , cum tertia parte DB . Rursum, quoniam diuidendo, est tubus $QELC$, ad cylindrum TF , ut rectangulum AEC , ad quadratum ED , nempe ex hypothesi, ut DB , ad BG , & conoides EBF , est dimidium cylindri TF , ut ostendimus præcipuè in lib. 2. proposit. 15. Ergo tubus $QELC$, erit ad conoides EBF , ut DB , ad dimidiam GB . Sed erat ad totum conoides ABC , ut eadem DB , ad dimidiam GB , cum tertia parte DB . Ergo $QELC$, erit ad reliquum, nempe ad differentiam conoideorum, ut DB , ad sui tertiam partem; nempe erit triplustalis excessus. Quod erat ostendendum.



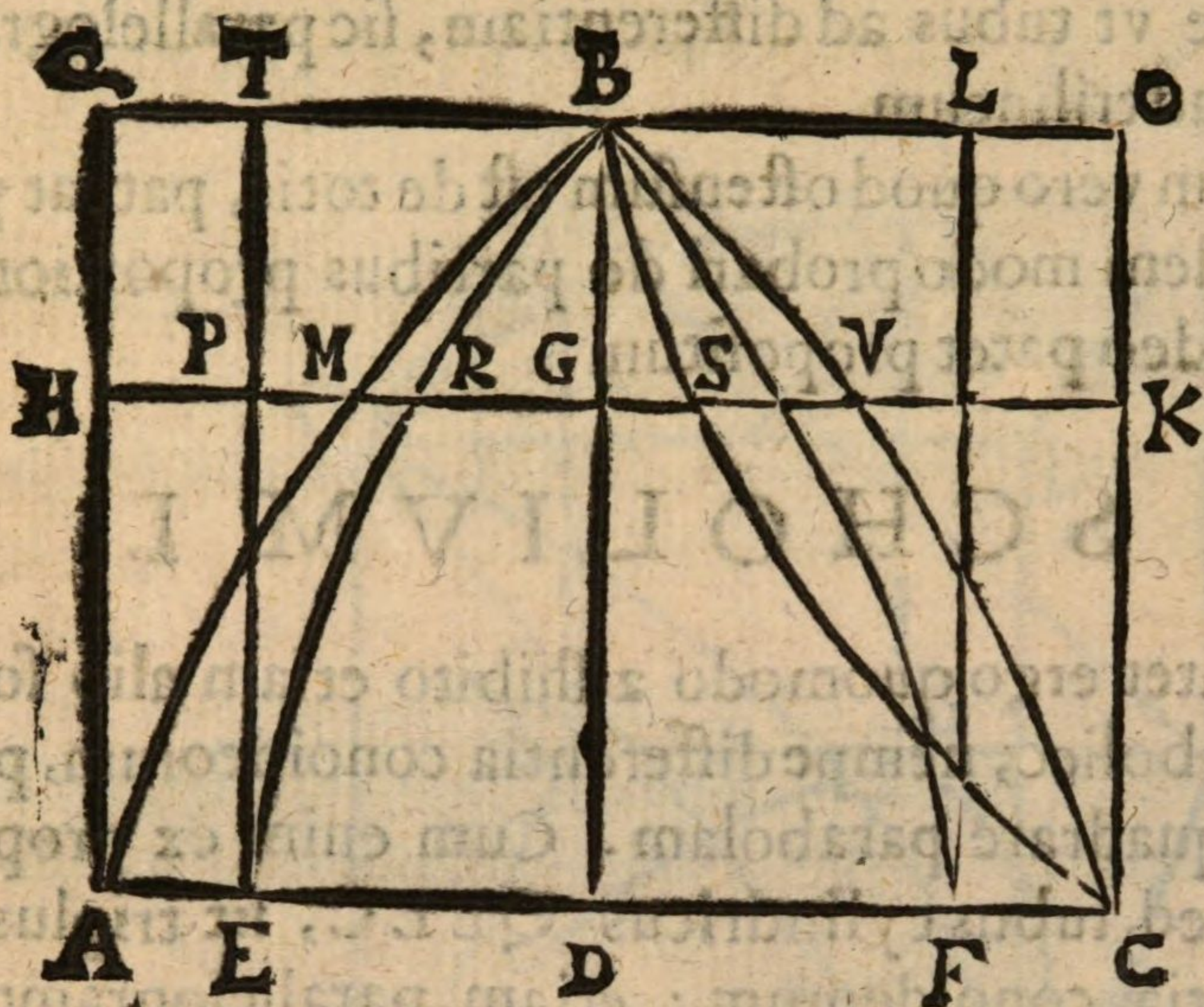
ALITER!

Quoniam tam totus cylindrus QC , est triplus totius coni ABC , quam ablatus cylindrus TF , est triplus ablati coni EBF (inscriptis prius conis in conoidibus); ergo & reliquus tubus $QELC$, triplus erit reliqui; nempe differentiarum conorum. Sed ex proposit. 4. differentia conorum est æqualis differentiarum conoideorum. Ergo tubus erit etiam triplus differentiarum conoideorum. Quod &c.

PROPOSITIO XXVIII.

Excessus cylindri circumscripti conoidi hyperbolico supra cylindrum circumscriptum conoidi parabolico saepe explicato, est ad differentiam conoideorum, ut parallelogrammum circumscriptum trilineo quadratico ad ipsum, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales; si diametri trilinei, & conoidis secantur proportionaliter.

Sint ergo conoidea hyperbolicum ABC , & parabolium EBF , ut saepe dictum est, cum circumscriptis cylindris QC , TF , & insuper sit semiparabola BCO , cuius diameter OB , basis OC , & parallelogrammum ei circumscriptum sit DO , adeo ut DBC , sit trilineum quadraticum, cuius diameter DB . Dico tubum cylindricum $QELC$, esse ad differentiam conoideorum, ut parallelogrammum DO , ad trilineum DBC , tam secundum totum, quam secundum partes proportionales. Sumatur in DB , diametro arbitrariè punctum G , per quod in solidis intelligatur transire planum HK , plano AC , parallelum, secans tubum in P , conoides hyperbolicum in M , & parabolium in R : item in parallelogrammo ducatur GK , parallela DC , secans curuam parabolicam in S . Quoniam ex proposit. 3. rectangulum AEC , est ad rectangulum MRV , ut quadratum DB , ad quadra-



quadratum BG ; & ut rectangulum AEC , hoc est
 rectangulum HPK , ad rectangulum $M RV$, sic
 armilla circularis HPK , ad armillam circularem
 $M RV$: ergo ut armilla circularis HPK , ad armil-
 lam circularem $M RV$, sic quadratum DB , ad
 quadratum BG . Sed ex natura parabola quadrati-
 cae, est etiam ut quadratum DB , ad quadratum
 BG , sic DC , seu KG , ad GS . Ergo & ut ar-
 milla HPK , ad armillam $M RV$, sic KG , ad GS .
 Cum verò punctum G , sumptum sit ad libitum; er-
 go ut omnes armillae tubi cylindrici $QELC$, pa-
 rallelae armillae AEC , ad omnes armillas differen-
 tia conoideorum, parallelas AEC , sic omnes li-
 neae parallelogrammi DO , parallelae DC , ad om-

nes lineas trilinei CDB , parallelas itidem DC ; nempe vt tubus ad differentiam, sic parallelogrammum ad trilineum.

Cum vero quod ostensum est de totis, pateat posse eodem modo probari de partibus proportionalibus, ideo patet propositum.

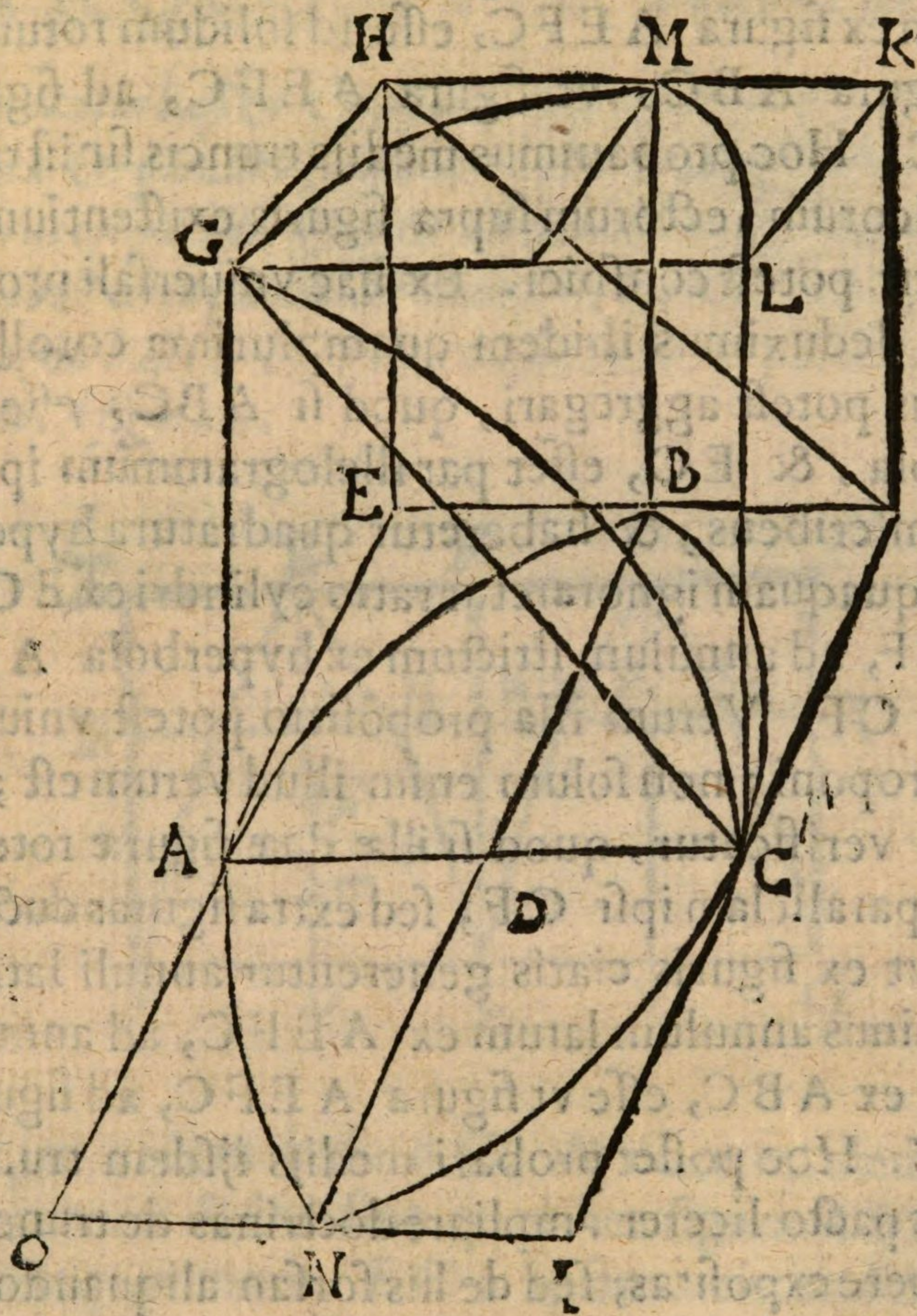
SCHOLIVM I.

Patet ergo quomodo adhibito etiam alio solido hyperbolico, nempe differentia conoideorum, possimus quadrare parabolam. Cum enim ex proposit. anteced. tubus cylindricus $QELC$, sit triplus differentiae conoideorum; etiam parallelogrammum triplum erit trilinei; & consequenter sesquialterum femiparabolæ.

Insuper patet, quod cum in schol. 2. proposit. 18. probatum sit, conum, trilineum quadraticum, excessum cylindri circumscripti hemisphærio, & hemisphæroidi, & excessum tubi cylindrici super annulum latum ex hyperbola circa secundam diametrum, esse quantitates proportionaliter analogas, patet inquam, his pro sexta addi differentiam conoideorum prædictam.

SCHOLIVM II.

In proposit. 11. lib. 2. de Infinit. Parab. cuius schema hic apponimus, probauimus, quod si sint
duæ



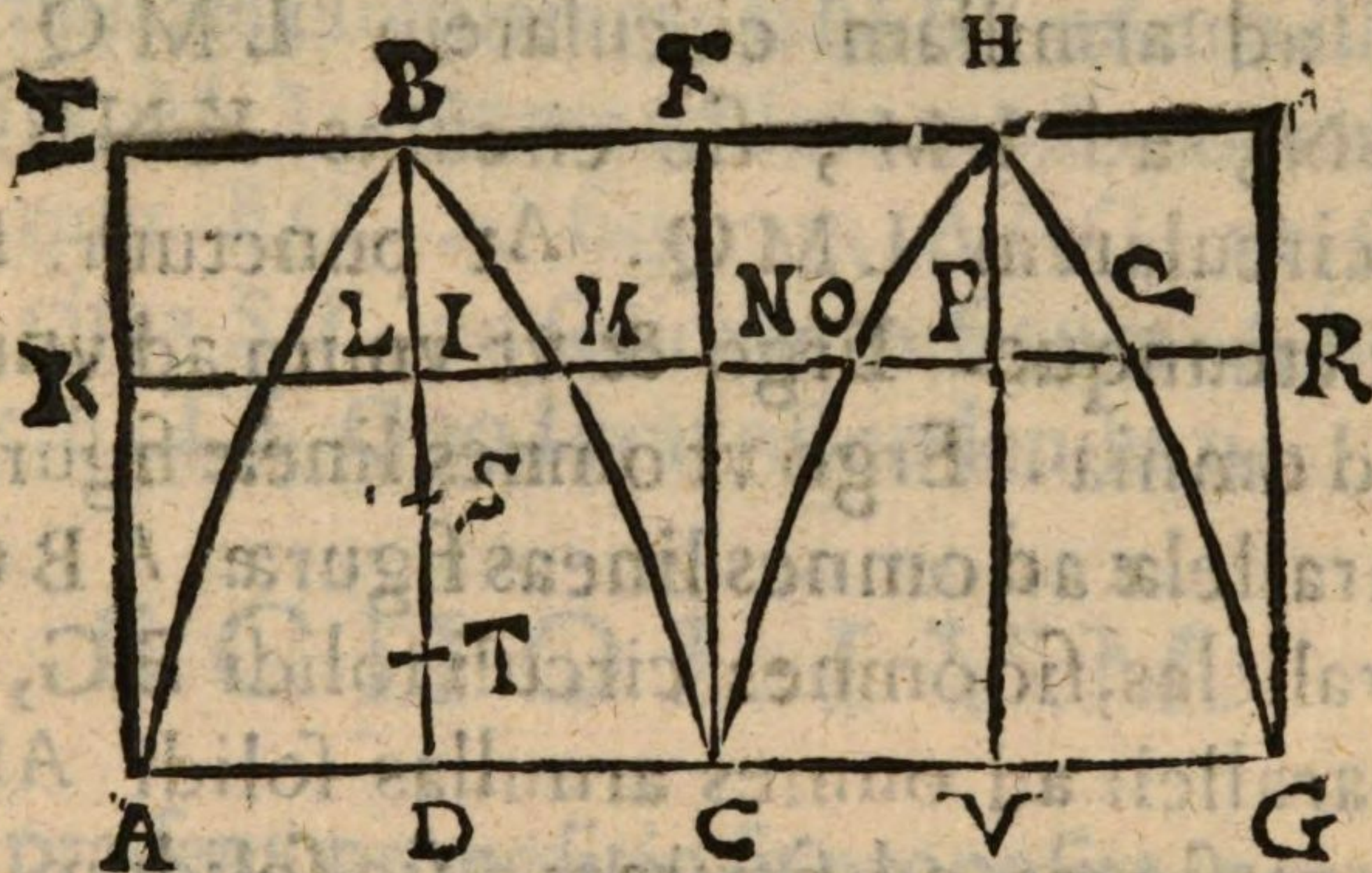
duæ quælibet figuræ ABC , $AEFC$, supra eadem basi AC , & circa communem axim BD ; sintque hæ talis naturæ, vt ipsis duplicatis ad partes AC , hæceuadat communis axis ambarum figurarum; probauimus inquam, intellectis ambabus figuris

ris gyrari circa parallelam ipsi BD , ductam per punctum C , quæ sit v.g. CF , solidum rotundum ortum ex figura $A E F C$, esse ad solidum rotundum ex figura $A B C$, vt figura $A E F C$, ad figuram $A B C$. Hoc probauimus medijs truncis sinistris cylindricorum rectorum supra figuris existentium, vt loco cit. potest conspici. Ex hac vniuersali propositione deduximus ibidem quamplurima corollaria; quibus potest aggregari, quod si $A B C$, esset hyperbola, & $E C$, esset parallelogrammum ipsam circumscribens, & haberetur quadratura hyperbolæ, nequaquam ignoraretur ratio cylindri ex $E C$, circa CF , ad annulum strictum ex hyperbola $A B C$, circa CF . Verum illa propositio potest vniuersaliter proponi; non solum enim illud verum est; sed etiam verificatur, quod si illæ duæ figuræ rotentur circa parallelam ipsi CF , sed extra figuras ductam, adeo vt ex figuris ciatis generentur annuli lati: nihilominus annulum latum ex $A E F C$, ad annulum latum ex $A B C$, esse vt figura $A E F C$, ad figuram $A B C$. Hoc posset probari medijs iisdem truncis, & hoc pacto liceret ampliare doctrinas de truncis in illo opere expositas; sed de his forsan aliquando. In præfenti probabimus medijs ad nostrum institutum magis accomodatis, sequentem propositionem vt ex huius cognitione inquiramus centra grauitatis infinitorum annulorum, vt infra patebit.

PRO.

PROPOSITIO XXIX.

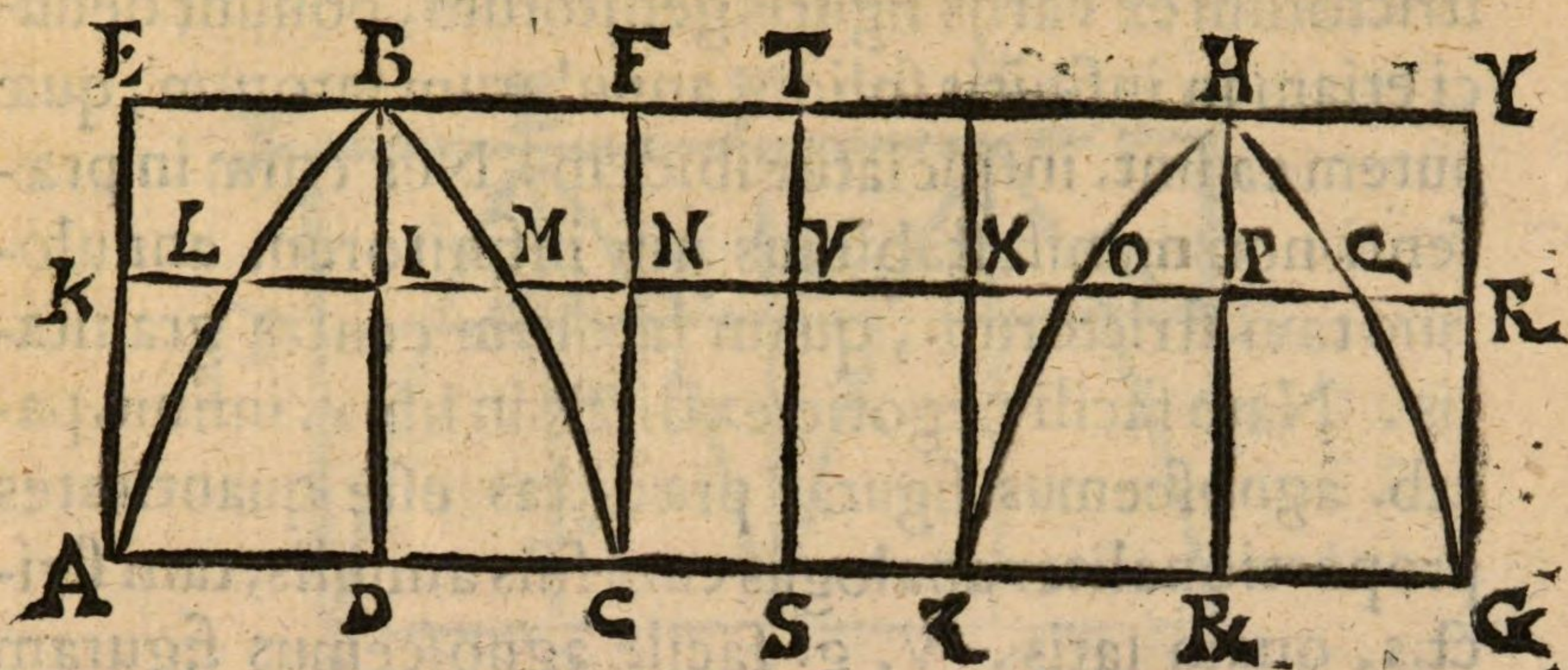
Si super eadem basi & circa eandem diametrum sint qualibet figura & parallelogrammum ipsam circumscribens. Cylindrus ex parallelogrammo ad solidum ex figura, reuolutis ambobus circa parallelam diametro ductam vel per extremitatem basis, vel extra basim, erit ut parallelogrammum ad figuram.



Super eadem basi AC, & circa eandem diametrum BD, sint quælibet figura ABC, & parallelogrammum EC, ipsam circumscribens & intelligamus ambas figuras prius rotari circa FC. Dico cylindrum EG, esse ad solidum ex figura ABC, circa eandem FC, quod sit ABCHG, ut EC, ad ABC. Accipiat in BD, arbitrarè punctum I, per quod intelligantur transire in figuris linea kN, AC, parallela, in solidis verò pla-

planum KN , item AG , parallelum. Quoniam enim ut kN , ad LM , sic (sumpta NR , communi altitudine) rectangulum kNR , ad rectangulum sub LM , & sub NR ; & NR , est æqualis MQ , quia MN , est æqualis tam NO , quam QR , unde etiam rectangulum sub LM , & sub NR , est æquale rectangulo LMQ . Ergo etiam ut kN , ad LM , sic rectangulum kNR , ad rectangulum LMQ . Sed ut rectangulum kNR , ad rectangulum LMQ , sic circulus, kNR , ad armillam circulem LMQ . Ergo & ut KN , ad LM , sic circulus KNR , ad armillam circulem LMQ . At punctum I , sumptum est utcumque. Ergo & ut unum ad unum, ita omnia ad omnia. Ergo ut omnes lineæ figuræ EC , AC , parallelæ ad omnes lineas figuræ ABC , item AC , parallelas, sic omnes circuli solidi EG , circulo AG , paralleli ad omnes armillas solidi $ABCHG$. Ergo & ut figura ad figuram, sic solidum ad solidum.

Sed supponamus figuras prædictas rotari circa ST , positam ultra C , ipsi BD , parallelam, adeo ut ex figuris generentur tubus cylindricus, & annulus latus ut in sequenti schemate. Dico nihilominus esse EC , ad figuram ABC , ut tubus ECY , ad annulum ex figura ABC . Nam accepto ut prius, puncto I , arbitrariè, factisque iisdem, concludemus eodem modo esse ut KN , ad LM , sic rectangulum KNR , ad rectangulum LMQ ; nempe



pe sic armillam circula rem kNR , ad armillam circula rem LMQ . Quare eodem modo concludemus esse figuram EC , ad figuram ABC , vt solidum ex EC , circa ST , ad solidum ex figura ABC , circa eandem TS . Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Cum præsens propositio sit proposita in tanta vniuersalitate, adeo vt comprehendat infinitas figuras circa diametrum, & infinitis modis diuersificatas, impossibile videtur posse ipsam ostendi in tali vniuersalitate vnica constructione nisi per indiuisibilia. Modo etiam archimedeo probari potest, sed in casibus particularibus, & constructionibus proprijs, vt quilibet poterit experiri.

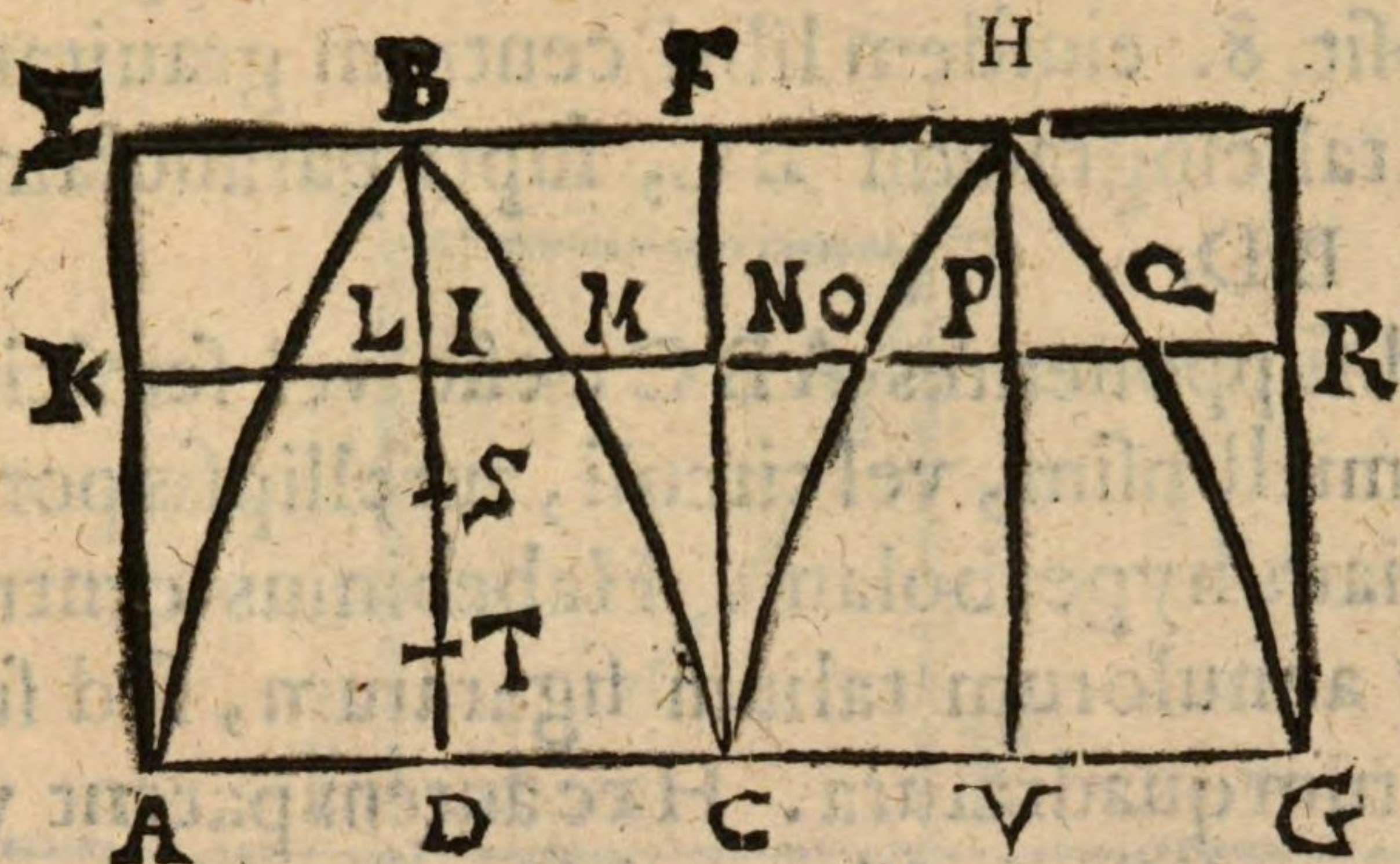
Ex hac autem vniuersalissima propositione, ea omnia, quæ sunt deducta in corollarijs proposit. cit. in opere de infinit. parab. circa varia solida annulorum

N stri.

strictorum ex varijs figuris genitorum, possunt deduci etiam in infinitis solidis annulorum latorum; quæ autem ea sint, inspiciatur ibidem. Nos enim in præsentī non manifestabimus nisi infinitorum annulorum tam strictorum, quam latorum centra gravitatis. Nam facili negotio ex dictis in lib. 4. infinit. parabol. agnoscemus figuras prædictas esse quantitates proportionaliter analogas cum suis annulis, tam strictis, quam latis. V. g. facile agnoscemus figuram ABC , esse quantitatem proportionaliter analogam tam cum annulo stricto $ABCHG$, in prima figura, quam cum annulo lato ex eadem ABC , in secunda figura. Quare etiam duo annuli ex eadem figura, nempe & strictus, & latus erunt quantitates proportionaliter analogæ tam in magnitudine, quam in gravitate. Sequitur ergo nos habere centra gravitatis omnium illorum annulorum tam strictorum, quam latorum, quorum figurarum genitricium supra explicatarum, habemus centrum gravitatis.

Si ergo supponamus ABC , esse parallelogrammum veluti FC , quod rotetur vel circa suum latus EC , vel circa TS , ei parallelum (quod semper intelligendum erit in dicendis impofterum, ne cogamur idem cum lectorum tedio repetere) centrum gravitatis cylindri, vel tubi cylindrici, secabit FC , vel TS , in ea ratione, in qua secat BD , centrum gravitatis parallelogrammi.

Si verò supponamus ABC , nobis repræsentare infinitas parabolas, habebimus centrum gravitatis infi-



infinitorum annulorum ex ipsis sic secare FC , ut pars terminata ad F , sit ad partem terminatam ad C , in primo annulo ex prima parabola ut 2. ad 1. In sec. ut 3. ad 2. in tertio ut 4. ad 3. & sic in infinitum. Ratio est, quia ex schol. prim. proposit. 2. lib. 2. habemus centrum grauitatis infinitarum parabolarum sic secare BD .

Si autem supponamus ABC , esse quamlibet infinitarum parabolarum, & EC , esse parallelogrammum infinitis parabolis circumscriptum. Habebimus centrum grauitatis infinitorum annulorum ortorum ex reuolutione excessuum infinitorum parallelogrammorum supra infinitas parabolas. Hoc autem centrum grauitatis sic secabit FC , ut pars terminata ad F , sit ad partem terminatam ad C , ut numerus annuli vnitate auctus, ad triplum numerum annuli vnitate auctum. V. g. in primo annulo ut 2. ad 4. In secundo, ut 3. ad 7. In tertio ut 4. ad

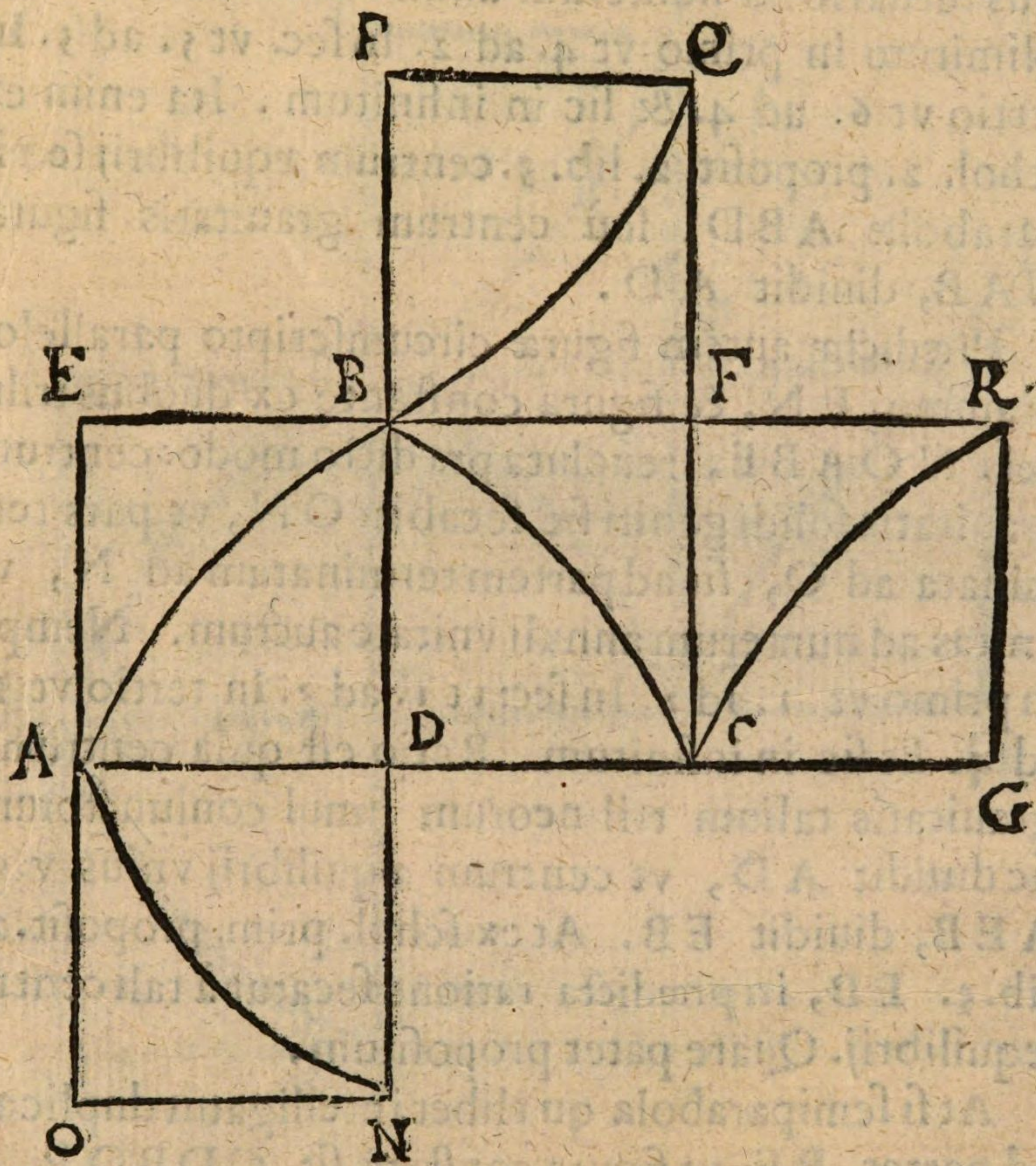
N 2 10. &

10. & sic in infinitum. Ratio est, quia ex schol. proposit. 8. eiusdem libri centrum grauitatis excessus parallelogrammi EC , supra parabolam sic secat ipsam BD .

Sed supponentes ABC , esse vel semicirculum, vel semiellipsim, vel circuli, aut ellipsis portionem, vel etiam hyperbolam. Habebimus centrum grauitatis annulorum talium figurarum, sed supposita figurarum quadratura. Hæc autem patent vera esse partim ex dictis in lib. 3. vbi in proposit. 24. assignauimus centrum grauitatis semicirculi; & in schol. prim. proposit. 25. omnium ipsius portionum; & in proposit. vltima lib. 4. in qua assignauimus centrum grauitatis omnium partium ellipsis; partim ex dictis in proposit. 22. huius, & in scholio eiusdem, vbi assignauimus centrum grauitatis hyperbolæ. Imo si in schemate illius propositionis, intelligamus excessum parallelogrammi GC , supra hyperbolam ABC , rotari vel circa HC , vel circa ipsi parallelam extra parallelogrammum: ex dictis ibidem, agnoscetur centrum grauitatis annulorum genitorum.

Existimantes autem ABC , esse cycloidem primariam; placitis Torricellij in lib. 1. de motu grau. schol. proposit. 18. annuentes, intelligemus centrum grauitatis annuli ex cycloide sic secare FC , vt pars terminata ad F , sit ad partem terminatam ad C , vt 7. ad 5.

Sed accipiamus schema sequens, in quo intelligamus semiparabolam BAD , duplicari ad partes
basis

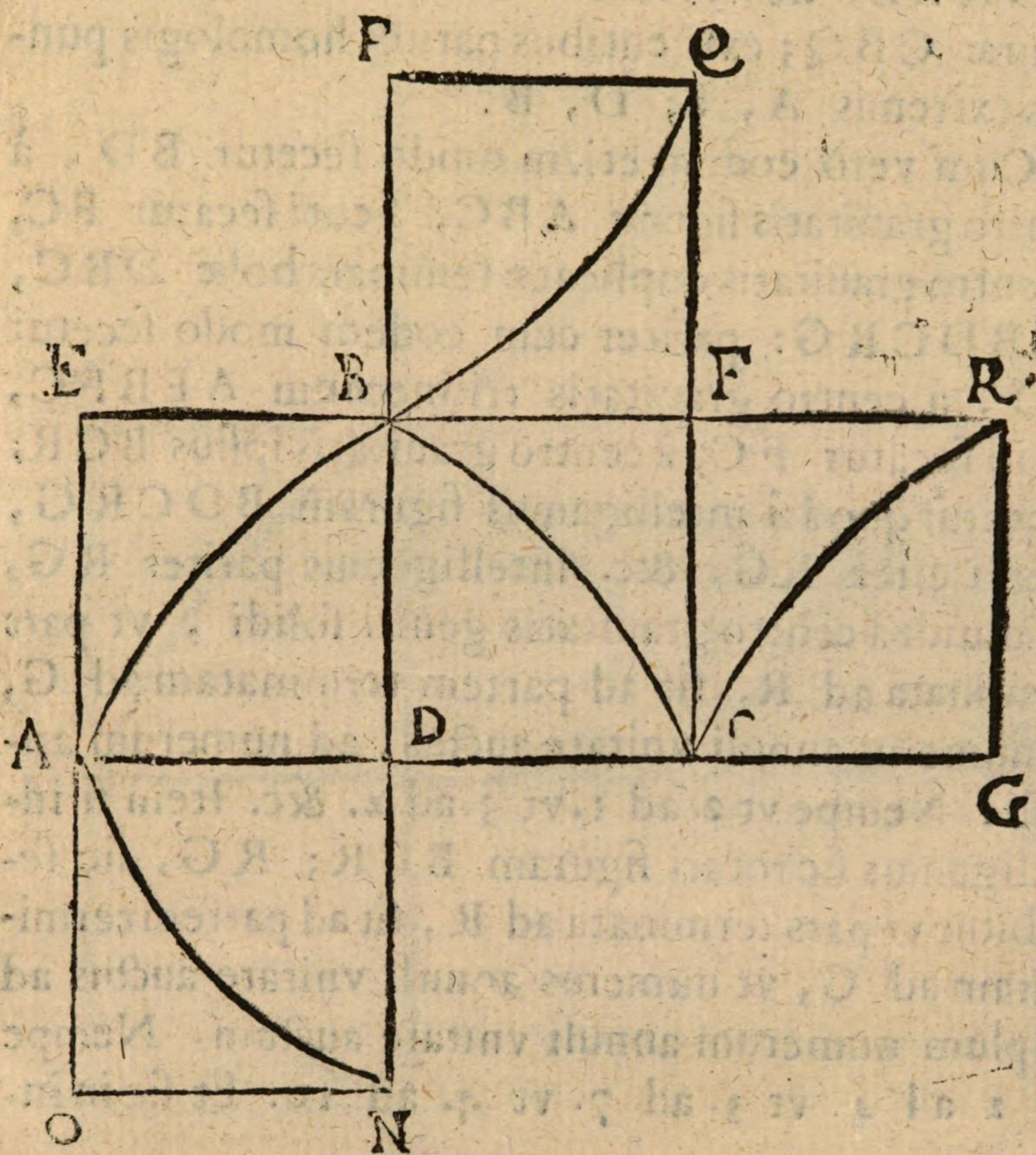


basis AD , adeo ut hæc euadat communis axis dua-
 rum semiparabolarum si nullo coniunctarum, hanc-
 que figuram intelligamus rotari vel circa ON , vel
 circa parallelam AD , extra figuram: centrum gra-
 uitatis productorum annulorum ita secabit ON ,
 vel illi parallelam &c. ut pars terminata ad O , sit ad
 partem

partem terminatam ad N , ut numerus annuli auctus ternario ad numerum annuli auctum unitate. Nimirum in primo ut 4. ad 2. In sec. ut 5. ad 3. In tertio ut 6. ad 4. & sic in infinitum. Ita enim ex schol. 2. proposit. 2. lib. 3. centrum æquilibrij semiparabolæ ABD , seu centrum gravitatis figuræ NAB , diuidit AD .

Prædictæ autem figuræ circumscripto parallelogrammo EN , & figura constante ex duobus trilineis $NOABE$, reuoluta prædicto modo: centrum gravitatis solidi geniti sic secabit ON , ut pars terminata ad O , sit ad partem terminatam ad N , ut unitas ad numerum annuli unitate auctum. Nempe in primo ut 1. ad 2. In sec: ut 1. ad 3. In tertio ut 1. ad 4. Et sic in infinitum. Ratio est quia centrum gravitatis talium trilineorum simul coniunctorum sic diuidit AD , ut centrum æquilibrij vnus v.g. AEB , diuidit EB . At ex schol. prim. proposit. 2. lib. 3. EB , in prædicta ratione secatur à tali centro æquilibrij. Quare patet propositum.

At si semiparabola quælibet intelligatur duplicari ad partes BF , ut figura constans sit $CDBQP$, & hæc rotetur vel circa DC , vel circa ipsi parallelam. Centrum gravitatis solidi geniti secabit pariter DC , ut pars terminata ad C , sit ad partem terminatam ad D , ut numerus annuli ternario auctus, ad numerum annuli unitate auctum. Nempe ut 4, ad 2. ut 5. ad 3. &c. Item si trilineum CBQ , sic rotetur; DC , sic secabitur ut pars terminata ad D , sit ad

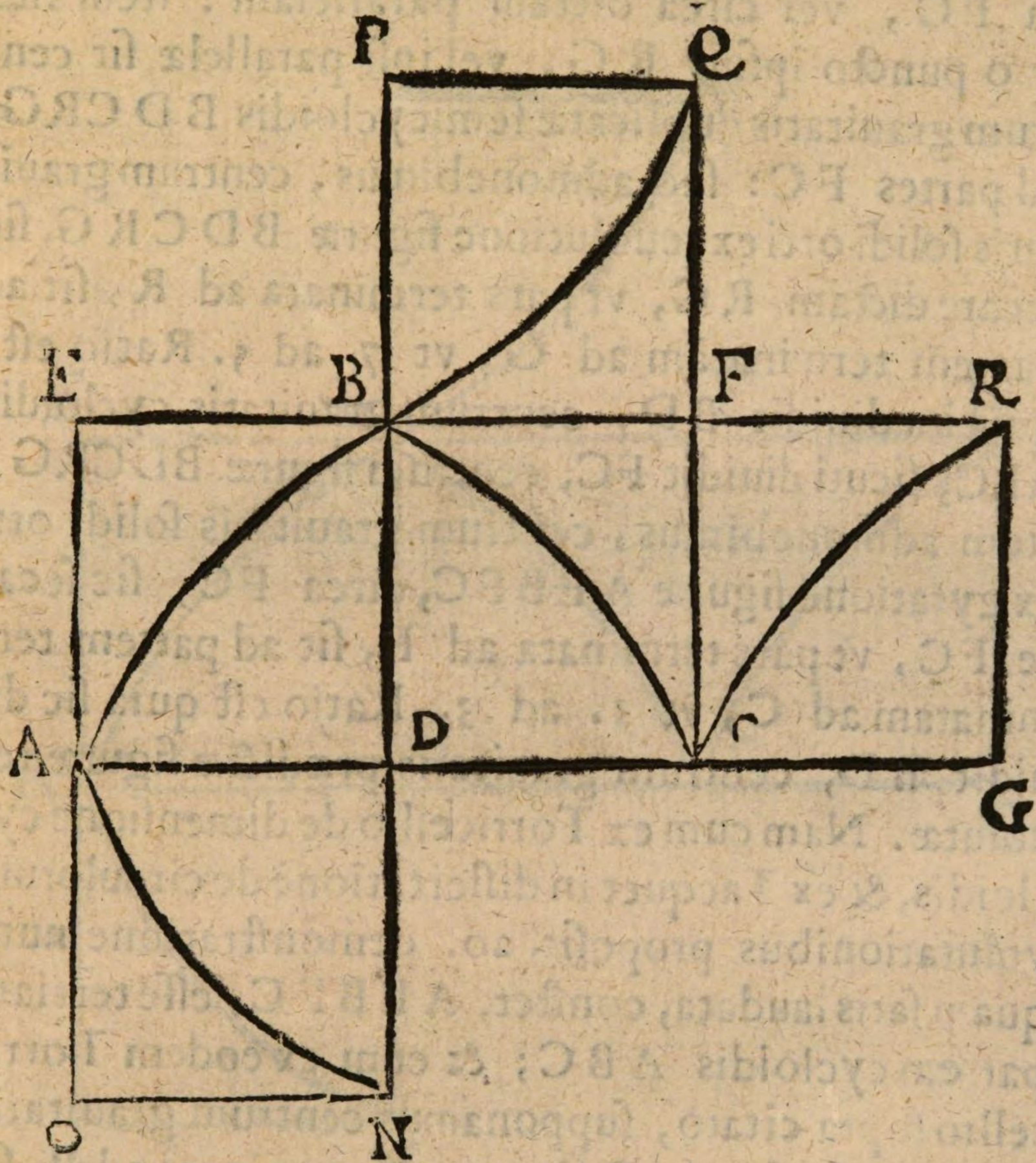


sit ad partem terminatam ad **C**, ut numerus annu-
 li unitate auctus, ad unitatem. Ratio est quia eodem
 modo secatur **AD**, à centro gravitatis figuræ
NAB, sicuti secatur **BF**, à centro gravitatis fi-
 guræ **DCBQP**; ita tamen ut homologi termini
 extremi sint **A**, & **F**; **D**, & **B**. Item eodem
 modo

modo secatur AD , à centro grauitatis figuræ $ONABE$, sicuti secatur BF , à centro grauitatis figuræ CBQ ; existentibus pariter homologis punctis extremis $A, F; D, B$.

Cum verò eodem etiam modo secetur BD , à centro grauitatis figuræ ABC , sicuti secatur FC , à centro grauitatis duplicatæ semiparabolæ DBC , in $BD CRG$: pariter cum eodem modo secetur BD , à centro grauitatis trilineorum $AEBFC$, sicuti secatur FC , à centro grauitatis ipsius BCR ; sequitur quod si intelligamus figuram $BD CRG$, rotari circa RG , &c. intelligemus pariter RG , sic diuidi à centro grauitatis geniti solidi, vt pars terminata ad R , sit ad partem terminatam ad G , vt numerus annuli vnitate auctus, ad numerum annuli. Nempe vt 2. ad 1. vt 3. ad 2. &c. Item si intelligamus sic rotari figuram $BCR; RG$, sic secabitur vt pars terminata ad R , sit ad partem terminatam ad G , vt numerus annuli vnitate auctus ad triplum numerum annuli vnitate auctum. Nempe vt 2 ad 4. vt 3. ad 7. vt 4. ad 10. Et sic in infinitum.

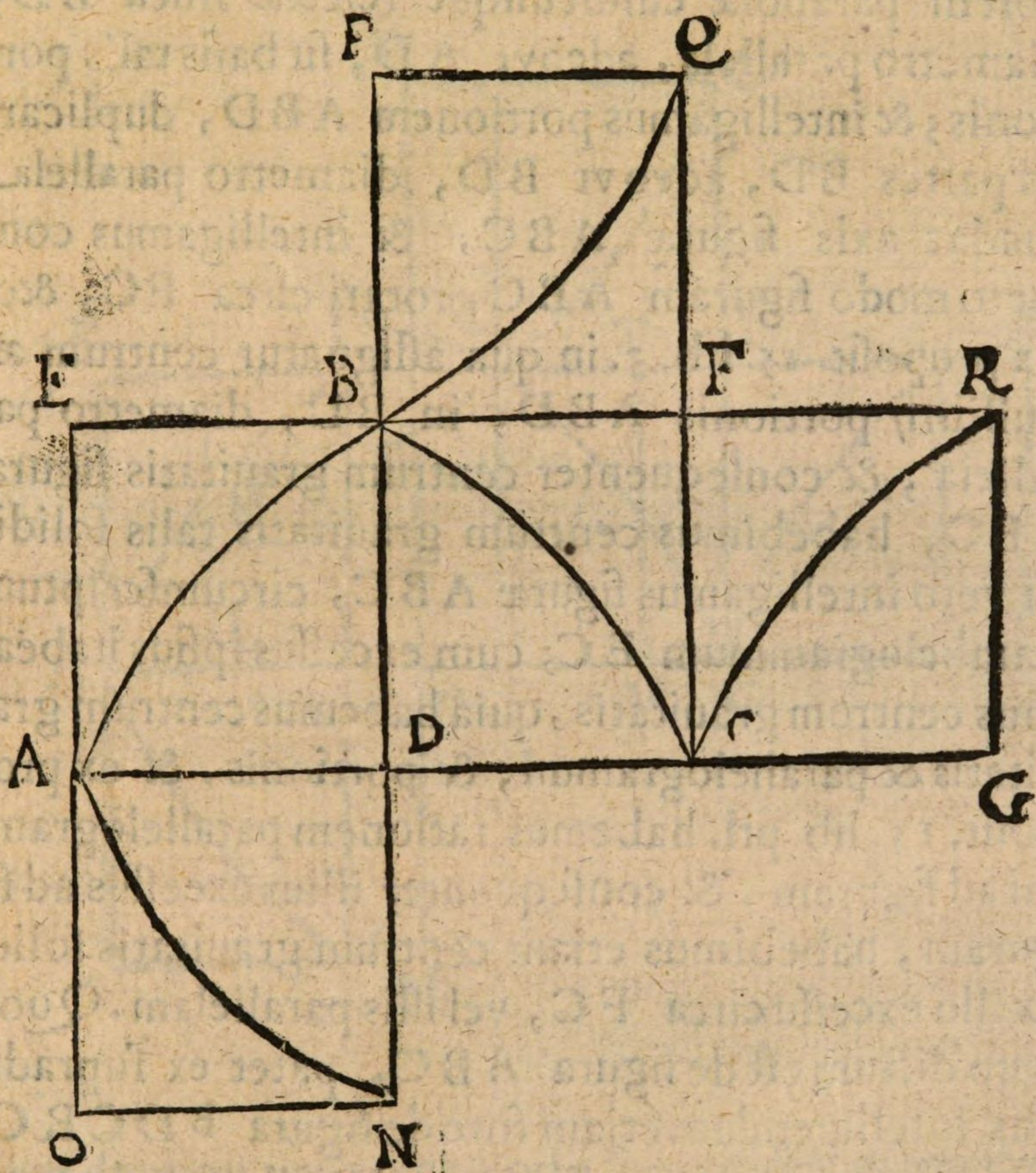
Quæ autem dicta sunt supra de parabola quatuor modis disposita, quantum ad assignationem centrorum grauitatis solidorum rotundorum ex ipsa genitorum, patet posse etiam applicari suo modo solidis genitis ex reuolutione portionum circuli, & ellipsis, item semihyperbolæ sic dispositarum. Sed quodnam sit tale centrum relinquimus lectori consideran-



derandum . Præcipuè quia centra grauitatis figura-
rum genitricium non habentur nisi supposita ipsa-
rum figurarum quadratura . Non sic relinquemus
considerandum lectori, in quo puncto ip sius FC ,
vel ipsi parallelæ, sit centrum grauitatis solidi geniti
ex excessu parallelogrammi EC , supra suppositam
O cycloi-

cycloidem primariam ABC , reuoluto vel circa FC , vel circa dictam parallelam: Item in quo puncto ipsius RG , vel ipsi parallelæ sit centrum grauitatis duplicatæ semicycloidis $BDCRG$, ad partes FC : sed admonebimus, centrum grauitatis solidi orti ex reuolutione figuræ $BDCRG$, sic secare dictam RG , vt pars terminata ad R , sit ad partem terminatam ad G , vt 7. ad 5. Ratio est, quia ita diuidit BD , centrum grauitatis cycloidis ABC , sicuti diuidit FC , centrum figuræ $BDCRG$. Item admonebimus, centrum grauitatis solidi orti ex gyratione figuræ $AEBFC$, circa FC , sic secare FC , vt pars terminata ad F , sit ad partem terminatam ad C , vt 1. ad 3. Ratio est quia sic diuidit BD , centrum grauitatis prædictæ figuræ reuolutæ. Nam cum ex Torricellio de dimensione cycloidis, & ex Tacquet in dissertatione de circulorum volutationibus proposit. 20. demonstratione nunquam satis laudata, constet, $AEBFC$, esse tertiam partem cycloidis ABC ; & cum ex eodem Torricellio supra citato, supponamus centrum grauitatis cycloidis sic secare BD , vt pars terminata ad B , sit ad partem terminatam ad D , vt 7. ad 5; & pariter cum medium punctum BD , sit centrum grauitatis totius parallelogrammi EC , nempe centrum grauitatis parallelogrammi relinquat hinc inde 6, partes, quarum BD , supponitur 12; lector in doctrinis Archimedis exercitatus facile agnoscat, centrum grauitatis prædicti excessus sic secare BD , vt pars

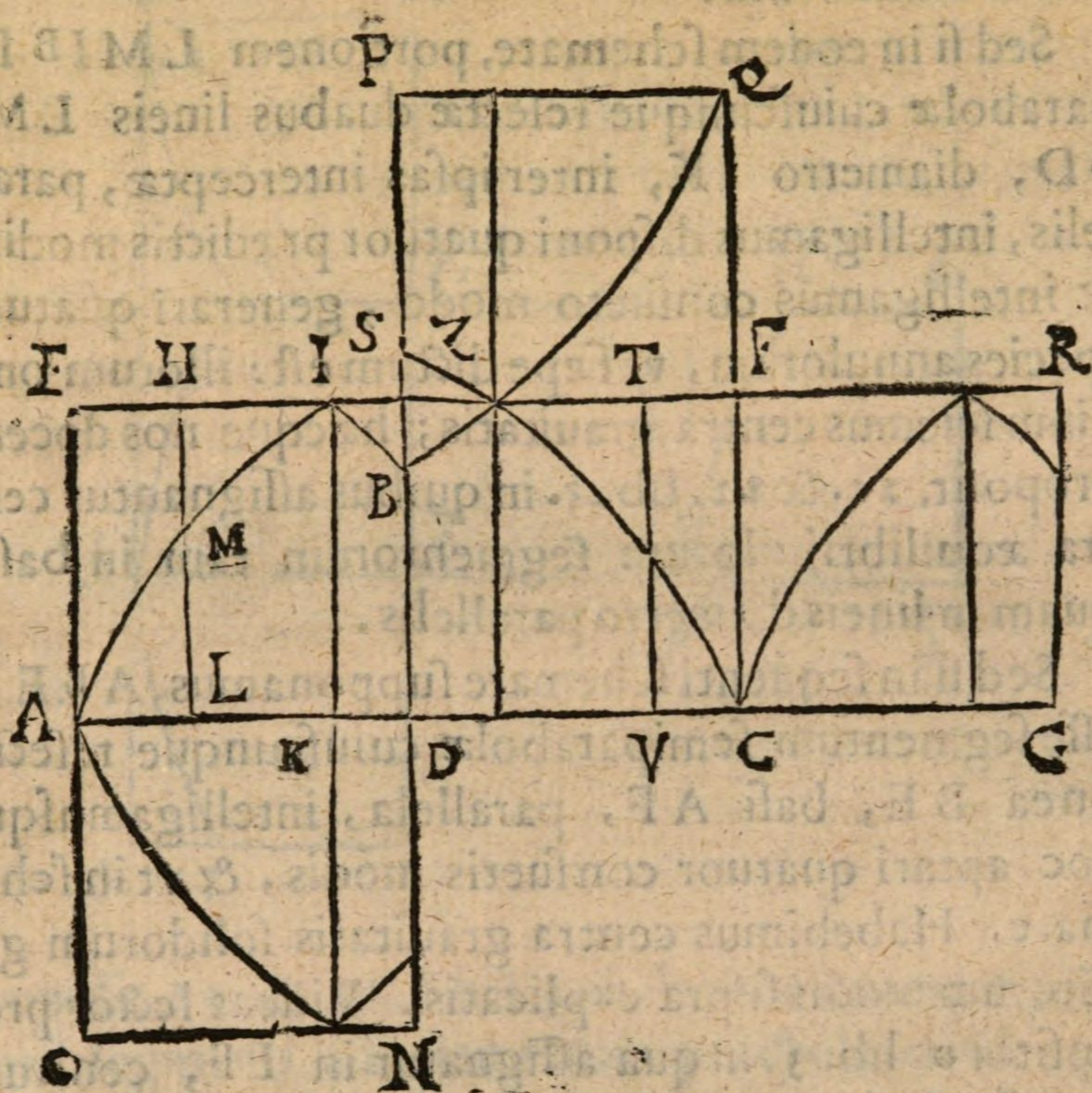
ter-



terminata ad B, fit ad partem terminatam ad D,
vt 3. ad 9. seu vt 1. ad 3. Lector autem sic edo-
ctus facile agnoscat etiam centrum grauitatis figuræ
BCR, reuolutæ circa RG, &c. sic secare RG,
vt pars terminata ad R, fit ad partem terminatam
ad G, vt 1. ad 3.

Supponamus autem ABD , esse portionem minorem parabolæ cuiuscunque resectæ linea BD , diametro parallela, adeo ut AD , sit basis talis portionis; & intelligamus portionem ABD , duplicari ad partes BD , adeo ut BD , diametro parallela euadat axis figuræ ABC ; & intelligamus consueto modo figuram ABC , rotari circa FC , &c. Ex proposit. 15. lib. 3. in qua assignatur centrum æquilibrij portionis ABD , in BD , diametro parallela, & consequenter centrum grauitatis figuræ ABC , habebimus centrum grauitatis talis solidi. Si vero intelligamus figuræ ABC , circumscriptum parallelogrammum EC ; cum excessus ipsius habeamus centrum grauitatis, quia habemus centrum grauitatis & parallelogrammi, & portionis, & ex proposit. 15. lib. pri. habemus rationem parallelogrammi ad figuram, & consequenter illius excessus ad figuram; habebimus etiam centrum grauitatis solidi ex illo excessu circa FC , vel illis parallelam. Quod vero dictum est de figura ABC , patet ex supradictis intelligendum etiam fore de figura $BD CRG$. Sed si talis figura intelligeretur duplicata ad partes AD , adeo ut basis DA , euadat axis figuræ NAB . Ex proposit. 14. lib. 3. habebimus centrum grauitatis annulorum ex NAB , circa ON , vel illi parallelam. Idemque intelligendum est si figura intelligeretur duplicata ut $CD BQP$.

Si vero in sequent figura, portio maior $AIBD$, parabolæ cuiuscunque, cuius basis AD , intelligatur



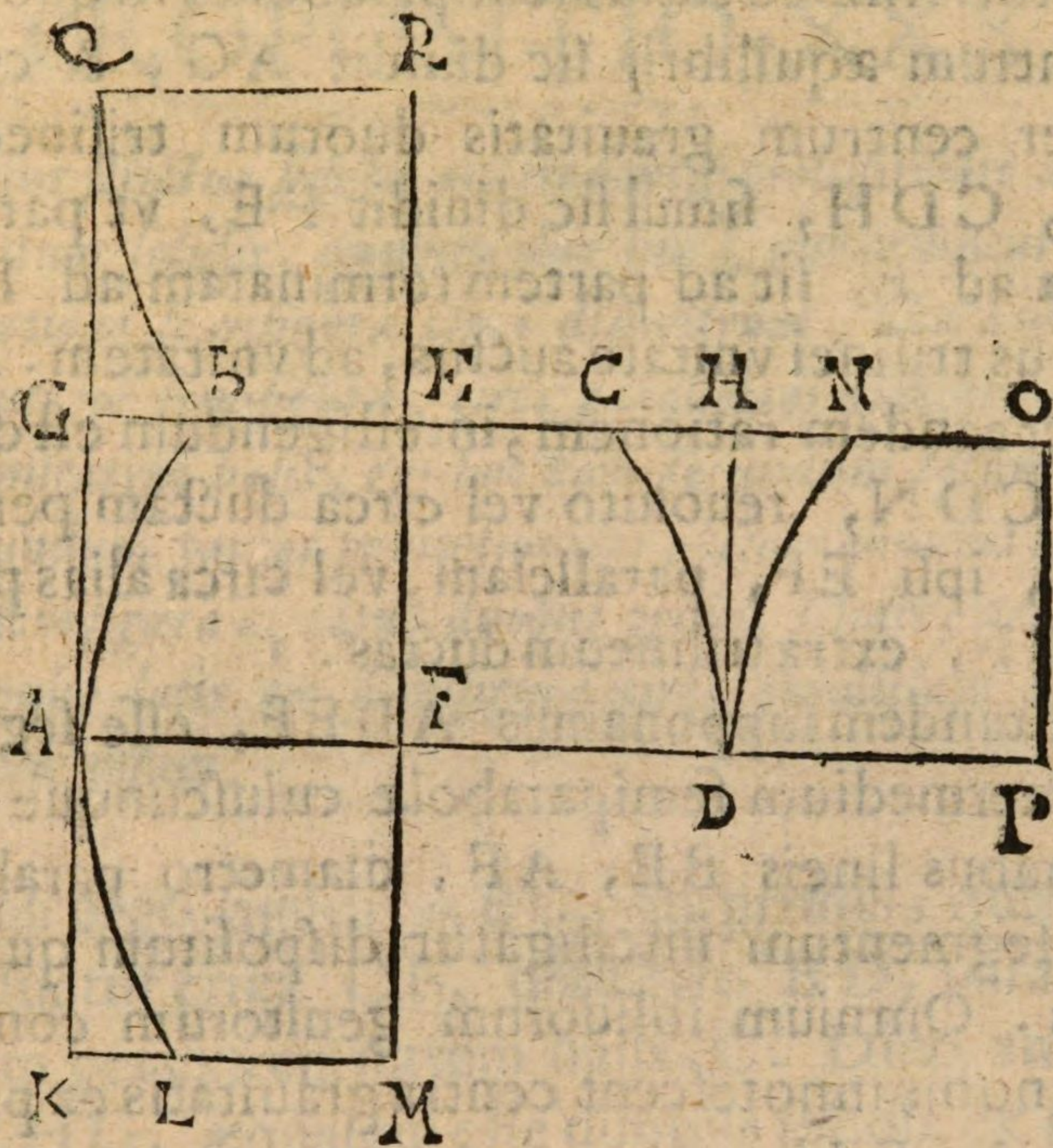
tur duplicata quatuor modis supra dictis, & intelligamus generari solida prædicta; nihilominus ipsorum solidorum habebimus centra gravitatis. Ratio est quia in proposit. 19. & 20. lib. 3. habemus centra æquilibrij maioris portionis parabolæ cuiuscunque resectæ linea diametro parallela, tam in prædicta linea diametro parallela, quam in basi. Vndè etiam habemus centra gravitatis duplicatæ portionis quatuor

tuor illis modis; & consequenter centra grauitatis illorum annulorum.

Sed si in eodem schemate, portionem $LMIBD$, parabolæ cuiuscunque resectæ duabus lineis LM , BD , diametro IK , inter ipsas interceptæ, parallelis, intelligamus disponi quatuor prædictis modis, & intelligamus consueto modo, generari quatuor species annulorum, vt sæpe dictum est: illorum omnium sciemus centra grauitatis; hæcque nos docent proposit. 21. & 22. lib. 3. in quibus assignantur centra æquilibrij illorum segmentorum tam in basi, quam in lineis diametro parallelis.

Sed si in sequenti schemate supponamus $ABEF$, esse segmentum semiparabolæ cuiuscunque resectæ linea BE , basi AF , parallela, intelligamusque hoc aptari quatuor consuetis modis, & vt in schemate. Habebimus centra grauitatis solidorum genitorum modis supra explicatis. Videat lector proposit. 10. lib. 3. in qua assignatur in EF , centrum grauitatis segmenti $ABCD$; & proposit. 11. in qua assignatur centrum æquilibrij segmenti $ABEF$, in basi AF .

Sed supponamus $FABE$, esse vtique segmentum semiparabolæ cuiuscunque, sed sic dispositæ vt AF , sit diameter, & BE , parallela diametro, adeovt $FABE$, sit segmentum ad diametrum, quod intelligatur duplicatum quatuor modis vt in schemate. Solidorum genitorum consueto modo ex figuris sic dispositis habebimus centra grauitatis. Quia in
pro.



proposit. 15. & 16. libri 3. habemus centra æquilibrium segmenti ad diametrum parabolæ cuiuscunque, tam in basi, quam in linea diametro parallela. Solum videtur nobis lectorem admonendum, circumscriptis figuris parallelogrammis; solidum ex excessu parallelogrammi GD, supra figuram ABCD, habere tale centrum gravitatis, quod sic fecerit DH, FE, parallelam, vt pars terminata ad D, sit ad partem terminatam ad H, vt numerus annuli vnitate auctus ad vnitatem. V.g. in primo, vt 2. ad 1. In secundo vt 3. ad 1. Et sic in infinitum. Ratio est quia AGB, est trilineum simile

simile toti trilineo totius semiparabolæ, in quo pariter centrum æquilibrij sic diuidit AG ; & consequenter centrum grauitatis duorum trilineorum AGB , CDH , simul sic diuidit FE , vt pars terminata ad F , sit ad partem terminatam ad E , vt numerus trilinei vnitate auctus, ad vnitatem. Idem propterea eandem rationem, intelligendum est de trilineo CDN , reuoluto vel circa ductam per N , seu C , ipsi EF , parallelam, vel circa alias parallelas EF , extra trilineum ductas.

Sed tandem supponamus $ABEF$, esse segmentum intermedium semiparabolæ cuiuscunque resectæ duabus lineis BE , AF , diametro parallelis, quod segmentum intelligatur dispositum quatuor modis. Omnium solidorum genitorum consueto modo nobis innotescant centra grauitatis ex proposito. 17. & 18. lib. 3.

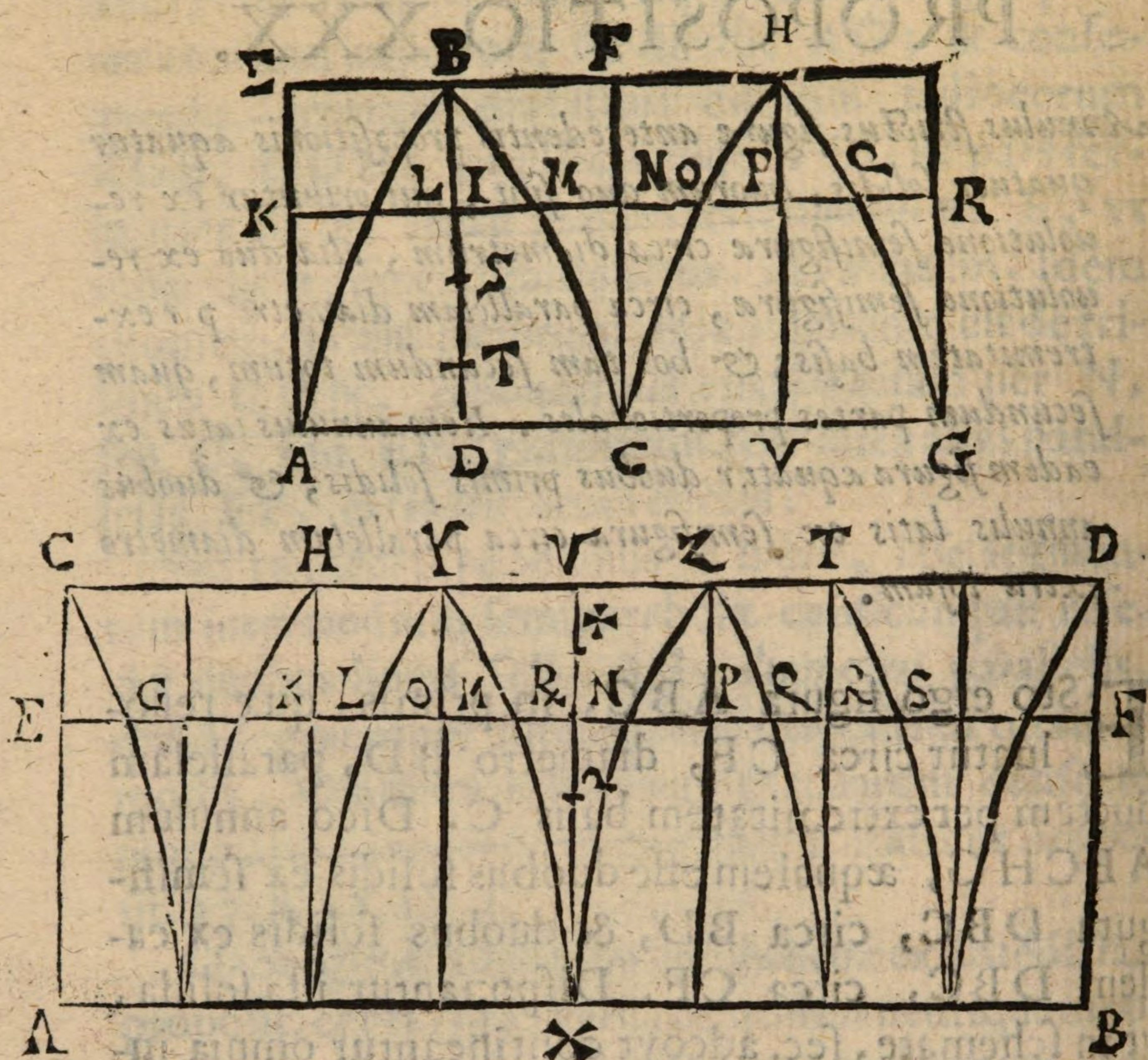
Quot igitur solidorum habeantur ex antedicta, proposit. centra grauitatis, de quibus neutiquam cognitio tenebatur, potuit lector animaduvertere. Sed non minorem vtilitatem capiemus ex sequenti propositione, quæ, modo ad nostrum institutum apto, explicata, ducet nos in cognitionem centrorum grauitatis quorundam solidorum, quæ vsque nunc geometria ignorauit. Præcipuè ex ipsa venabimur centra grauitatis omnium semifusorum parabolicorum; nempe docebimus in quo puncto basis sit centrum grauitatis solidi ex semiparabola quacunque reuoluta circa basim.

PROPOSITIO XXX.

Annulus strictus figuræ antecedentis propositionis æquatur quatuor solidis, quorum duo sint, qui oriuntur ex revolutione semifiguræ circa diametrum, alia duo ex revolutione semifiguræ, circa parallelam diametro per extremitatem basis; & hoc tam secundum totum, quam secundum partes proportionales. Item annulus latus ex eadem figura æquatur duobus primis solidis, & duobus annulis latis ex semifigura circa parallelam diametro extra ipsam.

ESto ergo figura ABC , in primis, quæ reuoluitur circa CF , diametro BD , parallelam ductam per extremitatem basis C . Dico annulum $ABCHG$, æqualem esse duobus solidis ex semifigura DBC , circa BD , & duobus solidis ex eadem DBC , circa CF . Disponantur ista solida, ut in schemate, sec. adeo ut contineantur omnia inter duo plana AB , CD , parallela. Sicuti autem taliter sunt disposita ut duo genita ex revolutione DBC , circa diametrum occupent medium locum, ita potuissent disponi quocunque alio modo; & sicuti disponuntur ut vnum aliud tangat, ita potuissent disponi ut essent ab inuicem distita quocunque intervallo. Disposita autem fuerunt sic tanquam concinno modo ad inferrenda pulcherrima, quæ ex tali propositione deducuntur. Accipiatur in diametro BD ,

P primæ



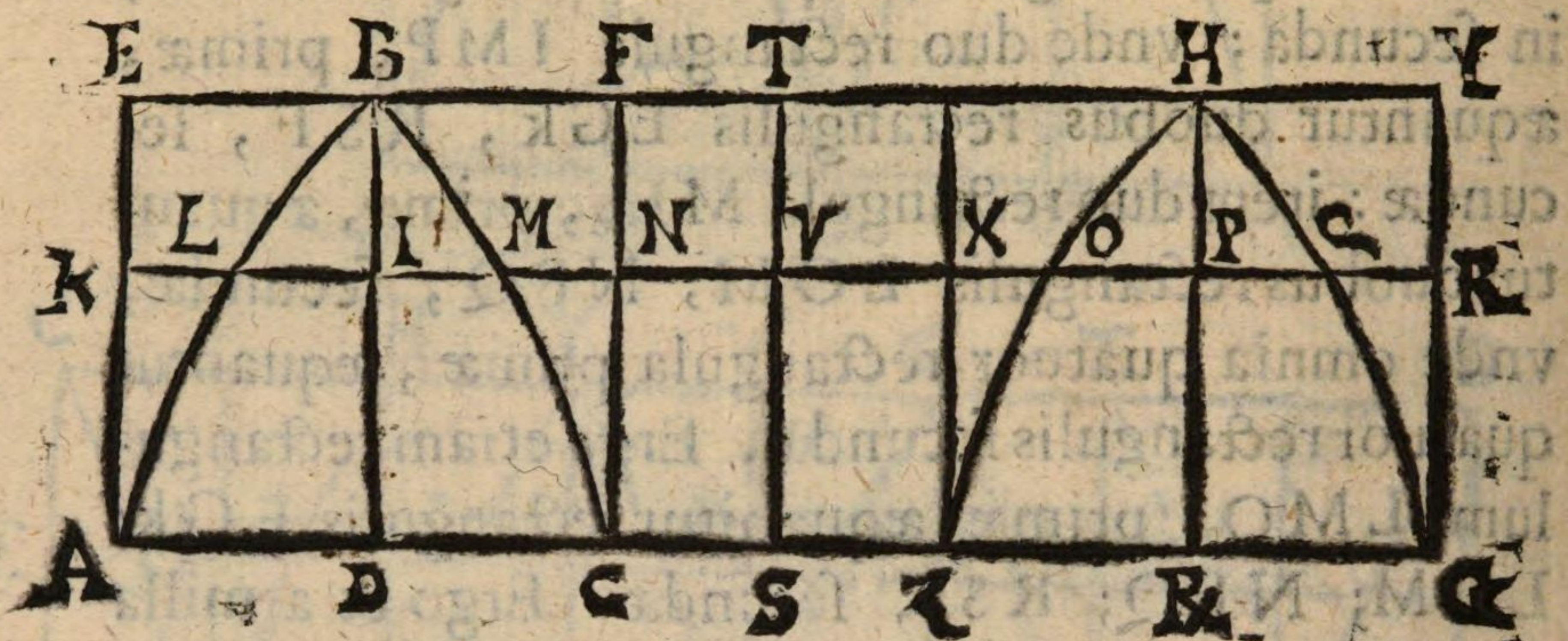
primæ figuræ, quodlibet punctum I , per quod du-
 catur planum LQ , plano AG , parallelum. Cum
 autem CA , in secunda figura supponatur æqualis
 ipsi BD , in prima, fiat CE , æqualis BI , & per
 E , agatur planum EF , AB , CD , planis paralle-
 lum. Rectangulum LMQ , primæ figuræ, divi-
 ditur in rectangula IMQ , & LI , MQ . Re-
 ctangulum IMQ , est æquale rectangulis IMP ;
 IM ,

IM , PQ , seu MIL . Pariter rectangulum LI , MQ , cum sit æquale rectangulo IMQ , diuiditur in eadem rectangula. Quare colligemus, rectangulum LMQ , æquale esse duobus rectangulis IMP , & duobus rectangulis MIL . Rectangulum IMP , in prima figura, æquatur rectangulo EGK , in secunda; unde duo rectangula IMP , primæ, æquantur duobus rectangulis EGK , RSF , secundæ: item duo rectangula MIL , primæ, æquantur duobus rectangulis LOM , NPQ , secundæ; unde omnia quatuor rectangula primæ, æquantur quatuor rectangulis secundæ. Ergo etiam rectangulum LMQ , primæ, æquabitur rectangulis EGK ; LOM ; NPQ ; RSF , secundæ. Ergo & armilla circularis LMQ , solidi primæ figuræ, æquabitur armillis circularibus EGK ; RSF , & circulis LOM , NPQ , secundæ. Cum autem puncta I , & E , sumpta sint ad libitum, inuenta que sit æqualitas inter plana prædicta; rectè deducemus, necdum omnes armillas circulares solidi primæ figuræ plano AG , parallelas, equales esse omnibus armillis circularibus, & omnibus circulis solidorum secundæ; sed etiam solidum primæ equari omnibus solidis secundæ.

Quod autem probatum fuit de totis, patet eodem modo probari posse de partibus proportionalibus; quia non dissimili modo probabimus partem solidi primæ contentam inter plana parallela LQ , AG , equari parti solidorum secundæ, conten-

tæ inter plana AB , EF , parallela. Quare patet propositum.

Secunda pars propositionis; nempe quod in sequenti figura, annulus latus ex figura ABC , circa TS , reuoluta sit equalis duobus solidis ex DBC ,



reuoluta circa BD , & duobus ex eadem reuoluta circa TS ; facta præparatione simili antecedenti, lector facile proprio Marte cognoscet, discurrendo vt nos supra fecimus. Quare patet propositum.

SCHOLIUM I.

Nec etiam præsens propositio in tanta vniuersalitate proposita, videtur vnica constructione probari posse nisi methodo indiuisibilium. In figuris vero particularibus, factis particularibus præparationibus, probari etiam poterit modo Archimedeo. Si enim supponamus ABC , esse figuram ad partes B , de-

B, deficientem, lector in geometricis peritus facile agnoscat probari posse modo Archimedeo.

Ex his ergo, & ex dictis in lib. 4. de Infinit. Parab. colligemus sæpe replicatam doctrinam; nimirum, annulum primæ figuræ, & solida simul secundæ, esse quantitates proportionaliter analogas tam in magnitudine, quam in grauitate. Vnde cum solidum primæ sit magnitudo sic analoga cum figura ABC . Sequitur etiam omnia solida secundæ figuræ simul, esse analoga cum figura ABC , tam in magnitudine, quam in grauitate. Cum autem facile etiam sit cognoscere prædictorum solidorum simul secundæ figuræ esse centrum grauitatis in VX (vt hoc enim sequatur sic ex industria disposita fuerunt;) ergo centrum grauitatis prædictorum solidorum simul ita secabit VX , vt centrum grauitatis figuræ ABC , secat BD . Ex hac doctrina adinueniemus centrum grauitatis nonnullorum solidorum. Sed prius adnotabimus vnum particulare in sequenti scholio, quod existimamus P. Marium Bettinum Societatis Iesù si viueret, libenter excepiſſe.

SCHOLIUM II.

Galileus, in postremis Dialogis pag. apud nos 28, loquitur de paradoxo quodam geometrico, in quo intelligit demonstrare circuli circumferentiam, equalem esse puncto. De hoc paradoxo vestigia Galilei sequentes, locuti sumus & in appendicula sexaginta

ginta problematum geometricorum, & in hoc opere in schol. 3. proposit. 10, & in schol. 3. proposit. 18. At P. Bettinus supradictus in tom. 3. sui *Ærarij* pareg. geom. schol. prim. & alibi, admonet paradoxum præsens nequaquam intelligendum esse geometricè, sed physicè: nam geometricè loquendo, Euclides, doctrinaque eius tradita in defin. 3. lib. 5. Element. ab omnibusque passim recepta huic asserto aduersatur. Proportio enim est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo. Quando ergo comparatur circumferentia cum puncto, & colligitur æqualitas, fit comparatio impropria, & quæ non est, cum sint quantitates diuersorum generum. At non deest alius medius terminus geometricus ostendens Galilei Parallogismum si intelligat geometricè loqui, non physicè. Hicque nobis suppeditatur ab antecedenti propositione, antecedentibusque solidis. Nam ad modum Galilei discurrentes, in maximum absurdum incideremus: ostenderemus enim circuli circumferentiam æqualem esse duabus circuli circumferentijs, quarum vnaquæque priori esset equalis, & insuper duobus punctis. Cum enim probatum sit, solidum ex *A B C*, in prima figura, æquale esse quatuor solidis in secunda figura tam secundum totum, quam secundum partes proportionales; sequeretur ex doctrina Galilei, quod cum tandem solidum *A B C H G*, in prima figura designat in circumferentia circuli, cuius diameter *B H*; item

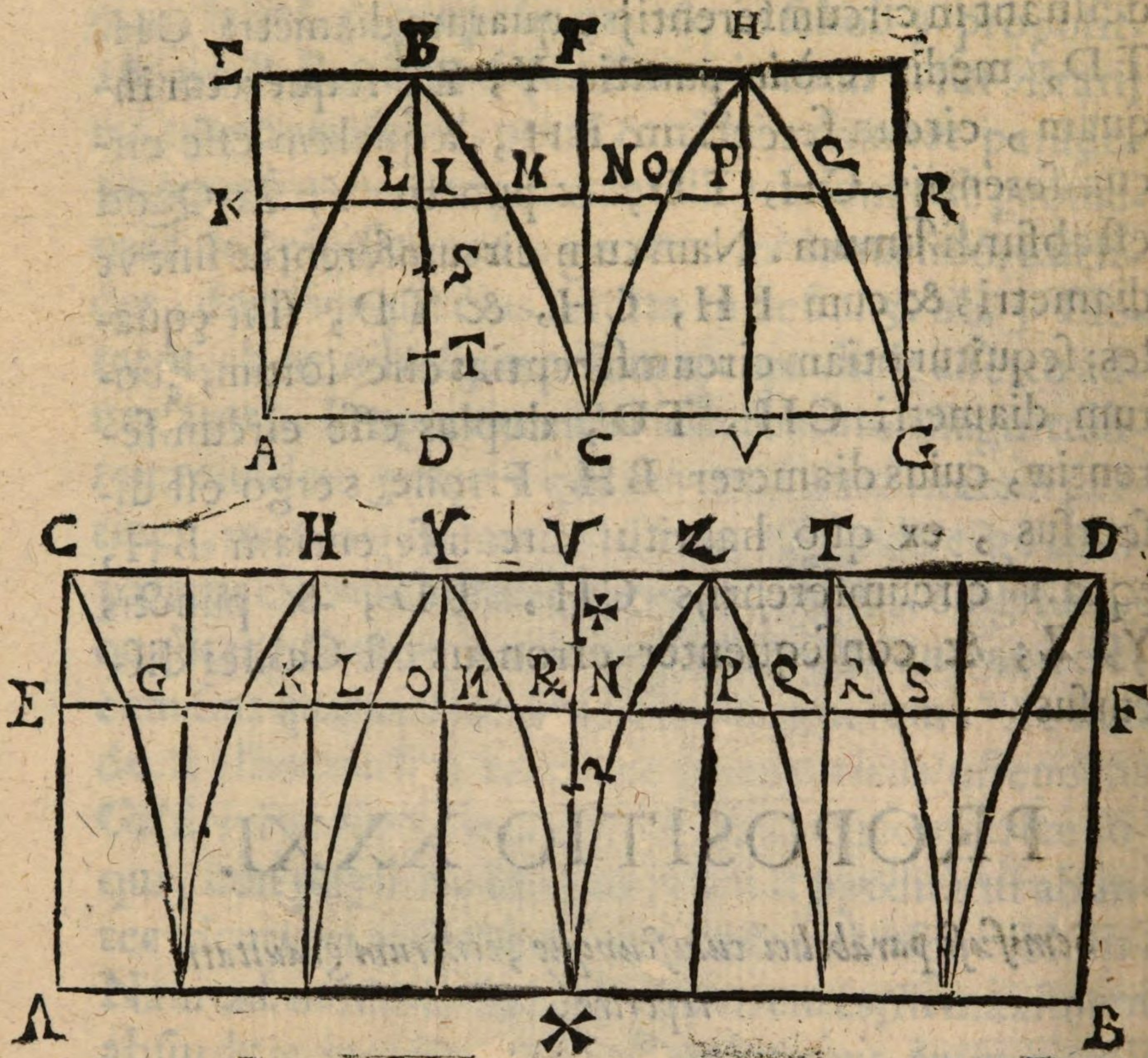
qua-

quatuor solidorum in secunda figura, duo extrema
 definant in circumferentijs, quarum diametri CH,
 TD, media verò in punctis Y, Z; sequeretur in-
 quam, circumferentiam BH, æqualem esse cir-
 cumferentijs CH, TD, & punctis Y, Z. Quod
 est absurdissimum. Nam cum circumferentiæ sint vt
 diametri, & cum BH, CH, & TD, sint equa-
 les; sequitur etiam circumferentias circulorum, quo-
 rum diametri CH, TD, duplas esse circumfe-
 rentiæ, cuius diameter BH. Erroneus ergo est di-
 scursus, ex quo hauritur circumferentiam BH,
 equari circumferentijs CH, TD, & punctis
 Y, Z; & consequenter erroneus est Galilei dis-
 cursus.

PROPOSITIO XXXI.

*Semifusi parabolici cuiuscunque, centrum gravitatis
 reperire.*

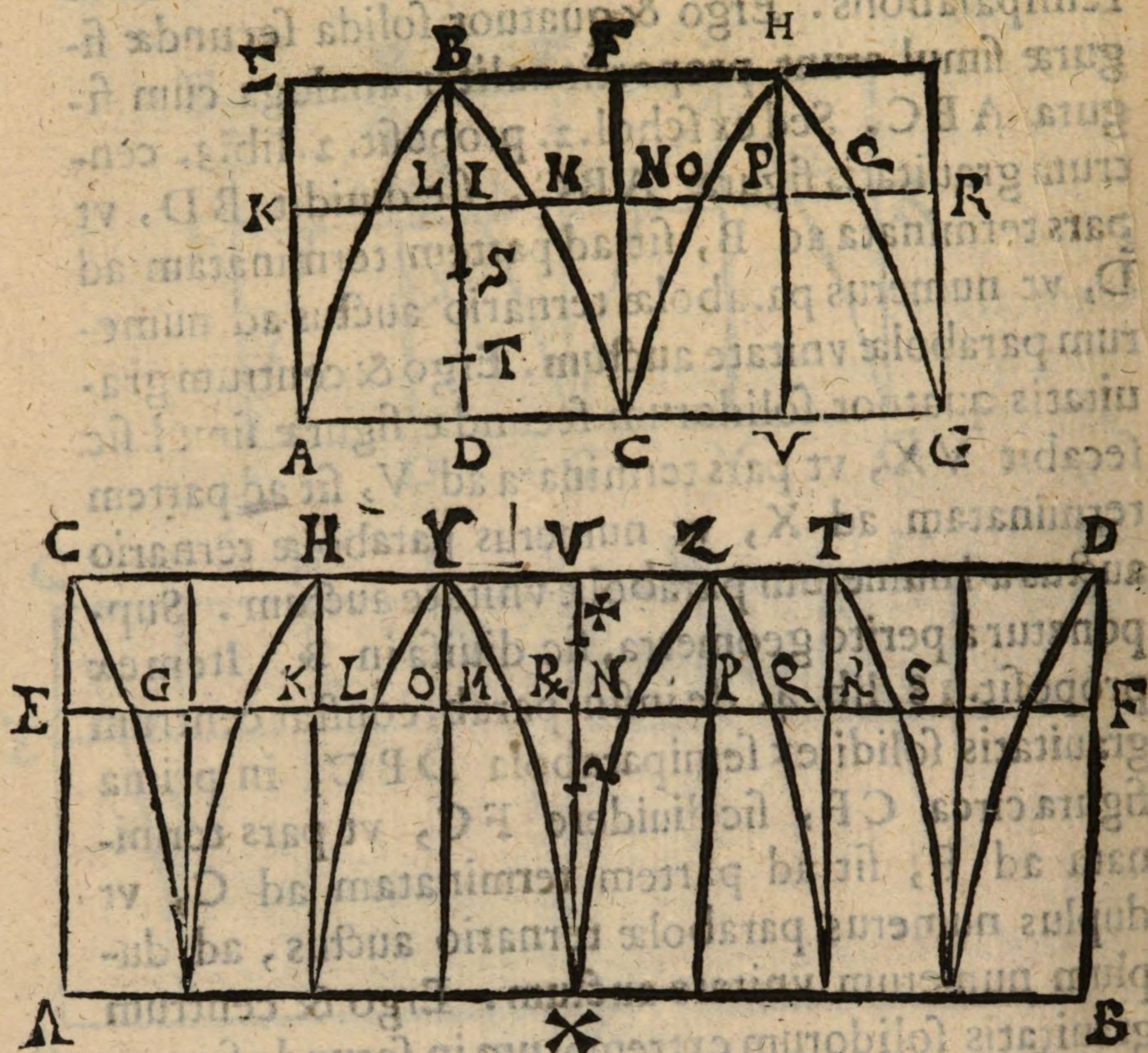
ESto ABD, semiparabola quæcunque in prima
 figura, cuius diameter AD, basis BD, quæ
 reuoluta circa basim BD, generet semifusum para-
 bolicum; huius oportet centrum gravitatis assigna-
 re. Semiparabola ABD, intelligatur duplicata
 ad partes basis BD, & figura ABC, ex duabus
 semiparabolis constans intelligatur rotari circa FC,
 BD, parallelam. Item in secunda figura intelligen-
 tur quatuor solida sic disposita, vt duo extrema AH,
 TB,



T B, sint illa, quæ oriuntur ex semiparabola DBC, reuoluta circa CF, duo vero media sint illa, quæ oriuntur ex reuolutione semiparabolæ ABD, circa basim BD, nempe sint duo semifusi parabolici ex data semiparabola. Ex proposit. anteced. constat quatuor solida secundæ figuræ esse proportionaliter analogæ cum solido ABCHG, primæ. Sed solidum ABCHG, primæ est proportionaliter ana-

analogum cum figura ABC , constante ex duabus semiparabolis. Ergo & quatuor solida secundæ figuræ simul erunt proportionaliter analogæ cum figura ABC . Sed ex schol. 2. proposit. 2. lib. 3. centrum gravitatis figuræ ABC , sic diuidit BD , ut pars terminata ad B , sit ad partem terminatam ad D , ut numerus parabolæ ternario auctus ad numerum parabolæ vnitæ auctum. Ergo & centrum gravitatis quatuor solidorum secundæ figuræ simul sic secabit VX , ut pars terminata ad V , sit ad partem terminatam ad X , ut numerus parabolæ ternario auctus ad numerum parabolæ vnitæ auctum. Supponatur à perito geometra, sic diuisa in R . Item ex proposit. 8 lib. 4. de infin. parab. constat centrum gravitatis solidi ex semiparabola DBC , in prima figura circa CF , sic diuidere FC , ut pars terminata ad F , sit ad partem terminatam ad C , ut duplus numerus parabolæ ternario auctus, ad duplum numerum vnitæ auctum. Ergo & centrum gravitatis solidorum extremorum in secunda figura, sic secabunt lineas circa quas semiparabolæ intelliguntur reuolutæ. Cum ergo talia solida sint ex instituto sic disposita, ut commune amborum centrum gravitatis cadat in VX : si ergo VX , sic diuidatur in $\ast$, ut $V\ast$, sit ad $\ast X$, ut duplus numerus parabolæ ternario auctus, ad duplum numerum parabolæ vnitæ auctum; $\ast$ erit centrum gravitatis illorum solidorum simul. Cum ergo in VX , sit centrum gravitatis tam quatuor solidorum simul,

Q quam



quam duorum extremorum; ergo & reliquorum
 duorum mediorum simul erit in VX , centrum gra-
 uitatis. Hoc autem reperietur si fiat reciprocè vt
 duo media ad duo extrema, sic $\times R$, ad $R 2$. Cum
 ergo ex corollar. prim. proposit. 4. lib. 3. sit solidum
 vnum medium ad vnum solidorum extremorum,
 nempe duo media ad duo extrema, vt numerus para-
 bolæ ad numerum parabolæ vnitatis auctum; si fiat

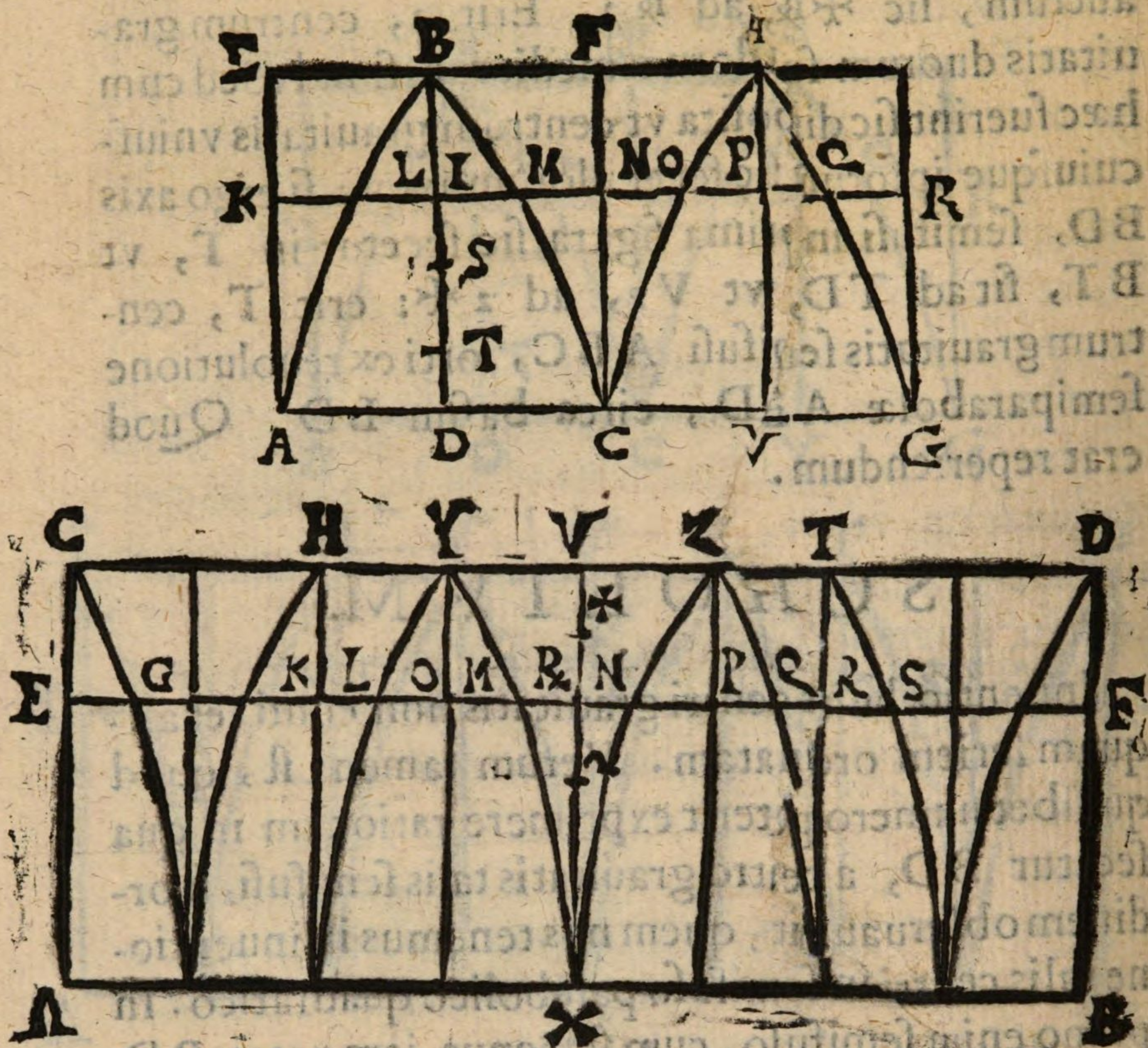
vt

vt numerus parabolæ ad numerum parabolæ vnitate auctum, sic $\times 2$, ad 2 . Erit 2 , centrum grauitatis duorum solidorum mediorum simul. Sed cum hæc fuerint sic disposita vt centrum grauitatis vnius cuiusque ipsorum sic secet illorum axim; si ergo axis BD, semifusi in prima figura, sic secetur in T, vt BT, sit ad TD, vt V_2 , ad $2 \times$: erit T, centrum grauitatis semifusi ABC, orti ex reuolutione semiparabolæ ABD, circa basim BD. Quod erat reperiendum.

SCHOLIUM.

Inuentio huius centri grauitatis non continet aliquam seriem ordinatam. Verum tamen est, quod quilibet numero poterit exprimere rationem in qua secetur BD, à centro grauitatis talis semifusi, si ordinem obseruauerit, quem nos tenemus in inuentione talis centri in semifuso parabolico quadratico. In primo enim semifuso, cum sit conus, iam patet BD, sic secari vt pars ad B, sit ad partem ad D, vt 3. ad 1. In quadratico verò, consequenter ad supra dicta, si BD, sic secetur in S, vt BS, sit ad SD, vt numerus parabolæ ternario auctus ad numerum parabolæ vnitate auctum; quarum BD, erit 8, talium BS, erit 5, & quarum BD, erit 12, talium BS, erit 7, cum dimidia. Item si secetur in I, vt BI, sit ad ID, vt duplus numerus ternario auctus, ad duplum numerum vnitate auctum,

Q 2 qua-



quarum BD , erit 12, BI , erit 7. Ergo quarum
 BD , erit 12, talium BI , erit 7; BS , 7, cum
 dimidio IS , dimidium; ID , 5; DS , 4. cum
 dimidio. Fiat ergo ut numerus parabolæ ad nume-
 rum parabolæ unitate auctum sic IS , ad ST . Er-
 go quarum partium IS , est 2, talium ST , erit tria.
 Cum ergo quarum BD , erat 12, talium BS , esset 7,
 cum dimidio, & IS , dimidium. Ergo quarum BD ,
 erit

erit 24; IS, erit 1; & BS, 15. Et qualium BD, erit 48, talium IS, erit 2, & BS, 30. Sed qualium IS, erat 2, talium ST, erat 3. Ergo qualium BD, erit 48, talium BT, erit 33, & TD, 15. Ergo centrum grauitatis semifusi parabolici quadratici sic diuidit BD, in T, vt BT, sit ad TD, vt 33, ad 15; & subtriplando terminos, vt 11, ad 5.

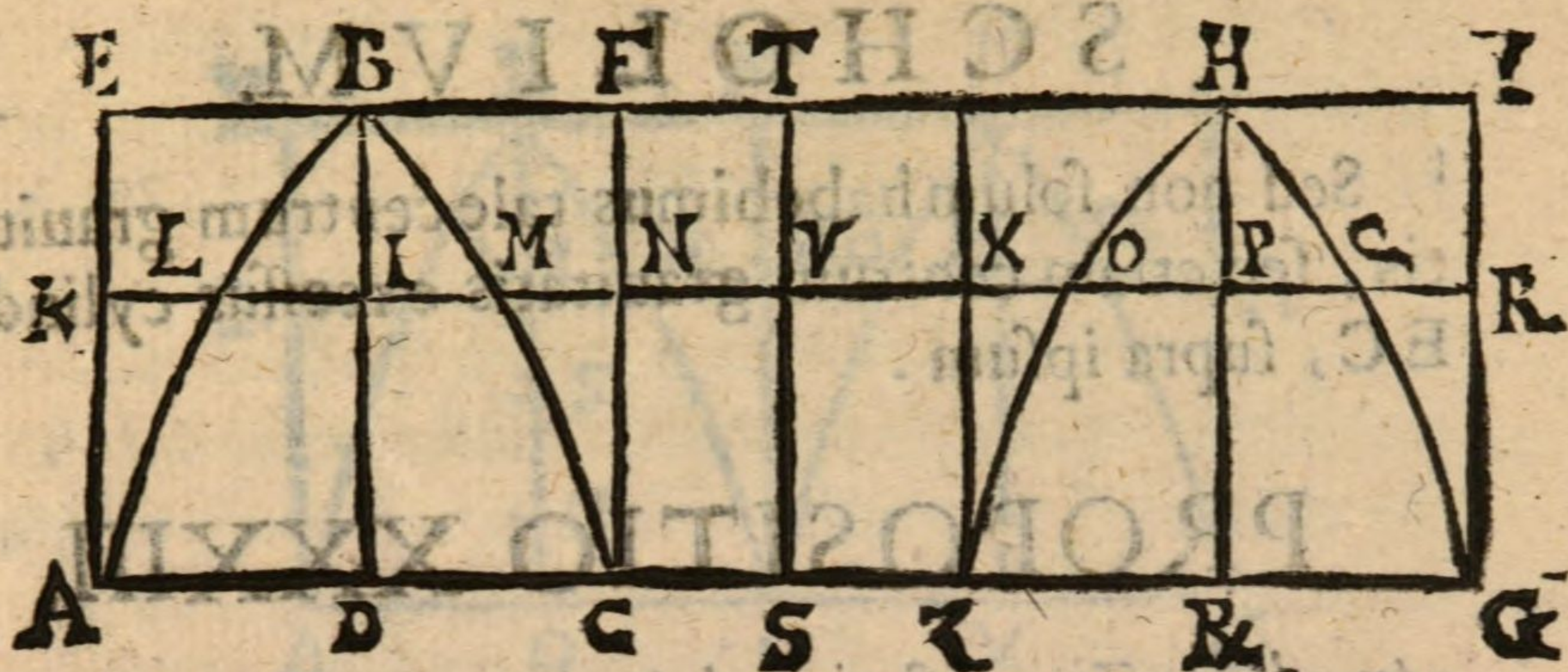
Sed non solum supradicta methodo reperiemus centrum grauitatis semifusi parabolici, sed etiam excessus cylindri ipsi circumscripti supra ipsum; nempe centrum grauitatis solidi extrilineo EBA, in prima figura, reuoluto circa basim semiparabolæ BD. Cum autem tale centrum facilius inueniatur alio modo, ideo hunc experiemur in parabola quadratica in numeris. Supponamus ergo BD, sectam bifariam in S, & in T, sic vt BT, sit ad TD, vt 11, ad 5. adeo vt T, sit centrum grauitatis semifusi ABC. Ergo quarum BD, erit 16, talium ST, erit 3, & BS, 8. Ergo qualium BD, erit 37, cum tertia parte, talium ST, erit 7, & BS, 18, cum duobus tertijs. Cum autem ex schol. prim. proposit. 4. lib. 2. sit excessus cylindri circumscripti semifuso ad ipsum vt 7, ad 8, & si fiat vt talis excessus ad semifusum, sic reriproce TS, ad SI, sit 1, centrum grauitatis prædicti excessus; erit SI, 8, qualium BS, est 18, cum duobus tertijs. Ergo talium reliqua BI, erit 10, cum duobus tertijs. Qualium ergo BD, est 37, cum tertia parte, erit BI, 10, cum duabus tertijs partibus, & reliqua DI, 26, cum duobus tertijs.

tijis. Ergo centrum grauitatis prædicti excessus secat BD , in I , in prædicta ratione.

PROPOSITIO XXXII.

Semifusi hyperbolici cuiuscunque, supposita hyperbolæ quadratura, possumus centrum grauitatis reperire.

SVpponamus in seq. figura DBC , esse semihyperbolam, cuius diameter CD , basis BD , latus tranfuerfum CZ , centrum S . Dico, supposita hyperbolæ quadratura, nos posse reperire centrum grauitatis semifusi hyperbolici ABC . Disponantur quatuor solida vt supra, & vt in secunda figura, sed duo extrema AH , TB , intelligantur esse annulos non strictos, vt schema exprimit, sed latos, ortos ex rotatione semihyperbolæ DBC , seq. figuræ circa secundam diametrum TS . Ergo horum quatuor solidorum sic dispositorum vt in illa figura habemus centrum grauitatis in VX , quia habemus centrum grauitatis solidi $ABCZHG$, seq. figuræ, quod ex proposit. 30. est proportionaliter analogum cum quatuor solidis secundæ figuræ. Habemus autem centrum grauitatis solidi $ABCZHG$, quia habemus in basi BD , centrum grauitatis figuræ ABC , constantis ex duabus semihyperbolis, ex proposit. 12. in qua, supposita hyperbolæ quadratura, inuentum fuit centrum æquilibrij semihyperbolæ DBC , in basi BD , & consequen-



sequenter centrum grauitatis in BD , ipsius ABC .
 Pariter, cum ex schol. 3. prop. 26. habeamus centrum
 grauitatis, sine suppositione quadraturæ hyperbolæ,
 annuli lati ex semihyperbola DBC , in hac figu-
 ra reuoluta circa secundam diametrum TS ; habe-
 bimus consequenter ad supra dicta, in secunda figu-
 ra, in VX , centrum grauitatis duorum solidorum
 extremorum, nempe duorum annulorum latorum
 AH , TB . Insuper ex schol. 2. prop. 32. supposita hy-
 perbolæ quadratura, habemus in hac figura ra-
 tionem, quam habet annulus latus $DBCZHR$,
 ad semifusum ABC ; & consequenter in secunda
 figura, habemus rationem duorum solidorum extre-
 morum simul ad duo solida media. Ergo consequen-
 ter habebimus in VX , secundæ figuræ centrum gra-
 uitatis duorum solidorum mediorum simul. Et pari-
 ter in hac figura, habebimus centrum in BD , se-
 mifusi ABC . Quod &c.

SCHO.

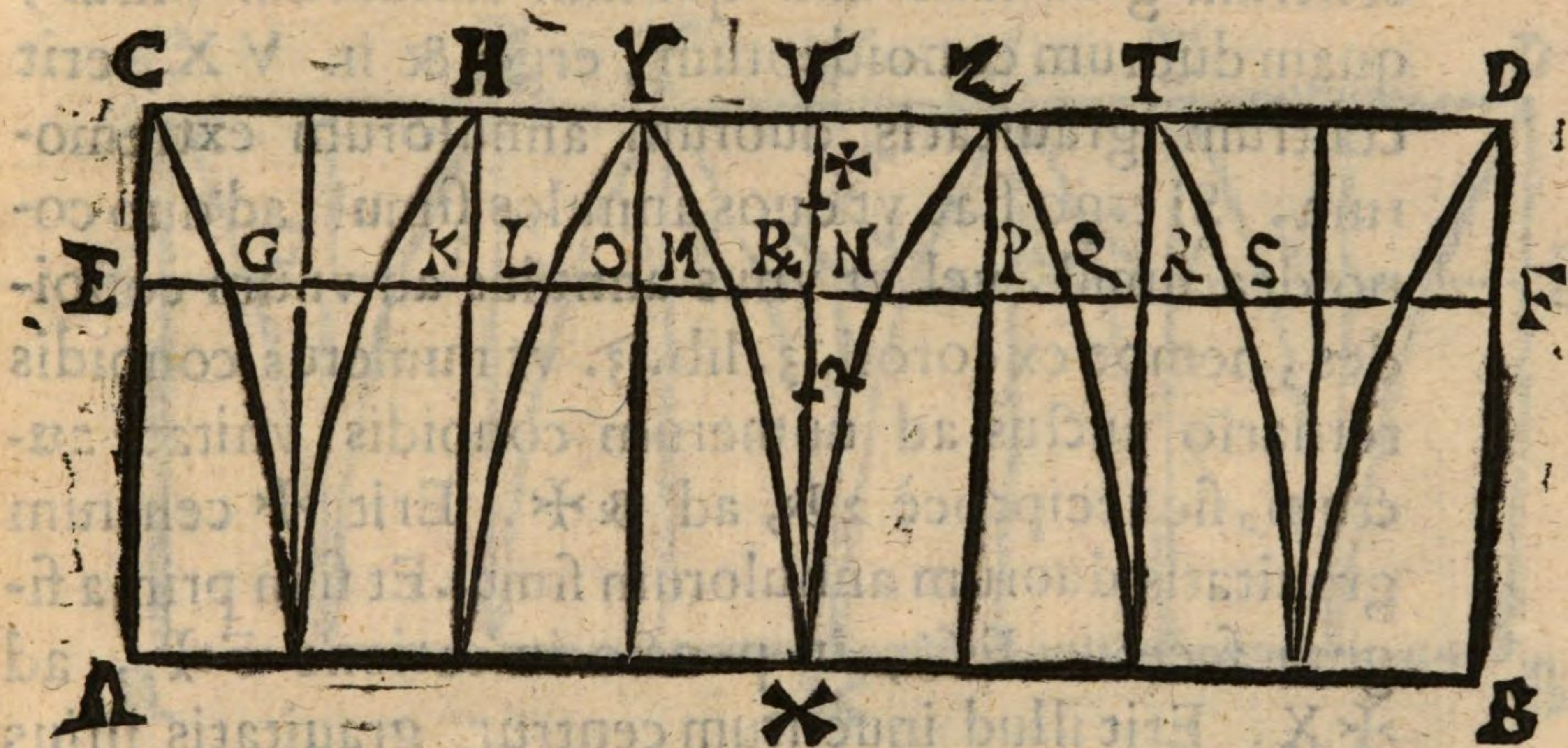
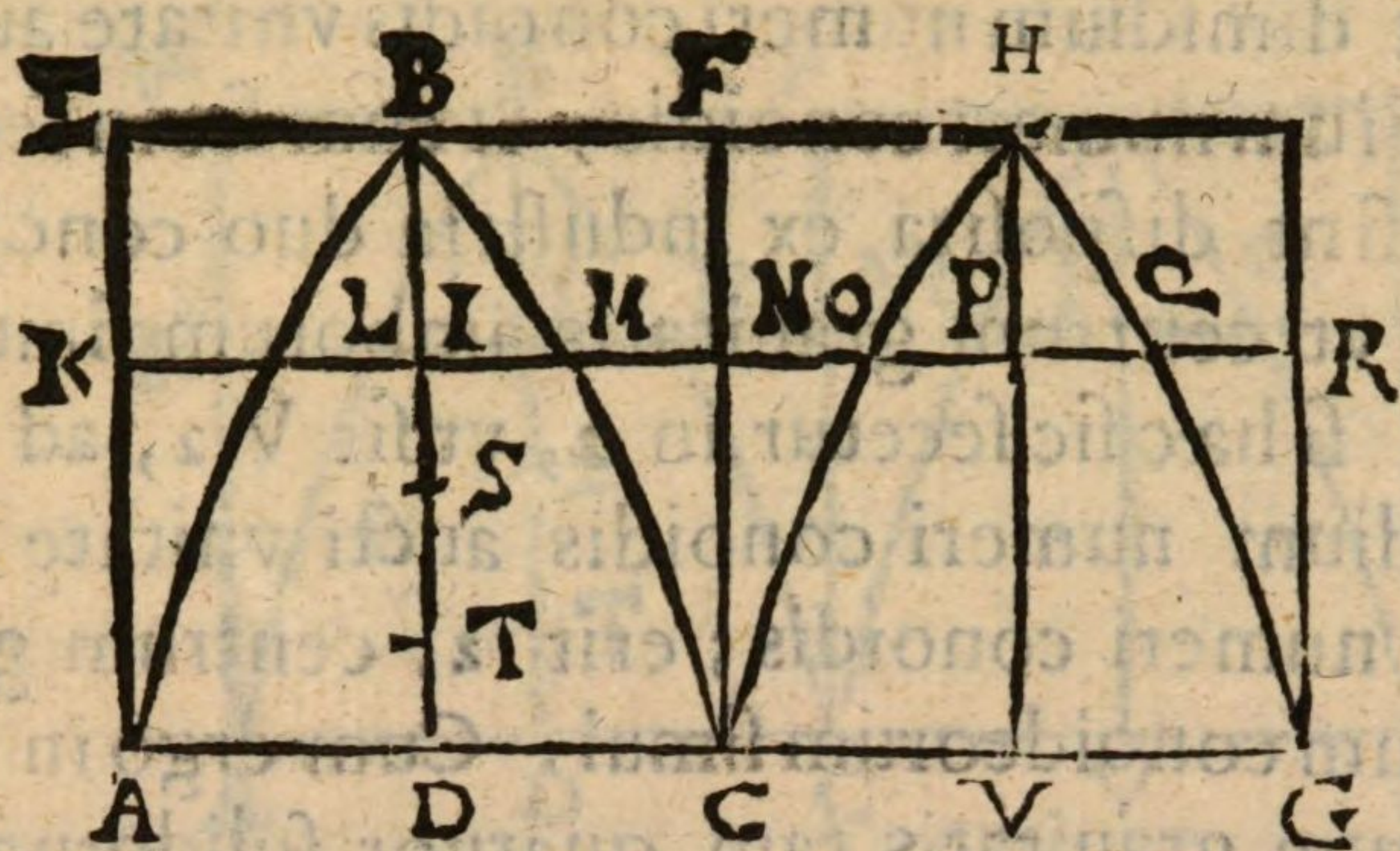
SCHOLIUM.

Sed non solum habebimus tale centrum grauitatis, sed etiam centrum grauitatis excessus cylindri EC , supra ipsum.

PROPOSITIO XXXIII.

Annuli stricti ex semiparabola quacunque, cuius exponens sit numerus par, reuoluta circa parallelam diametro ductam per extremitatem basis, centrum grauitatis assignare.

Esto semiparabola quacunque DBC , cuius exponens sit numerus par, sitque eius diameter BD , basis DC , & intelligamus DBC , rotari circa CF , parallelam diametro BD , ductam per C : oporteat annuli producti centrum grauitatis reperire. Intelligamus semiparabolam duplicari ad partes BD , vt fiat tota parabola ABC , & intelligamus hanc totam rotari circa FC , vt fiat annulus $ABCHG$. Cum hic annulus ex proposit. 30. sit æqualis quatuor solidis dictis in illa propositione, disponantur hæc solida vt in secunda figura. Ergo horum quatuor solidorum simul centrum grauitatis ita secabit VX , vt secat BD , centrum grauitatis parabolæ ABC . Sed ex schol. prim. proposit. 2. lib. 3. hoc centrum ita secat BD , vt pars terminata ad B , sit ad



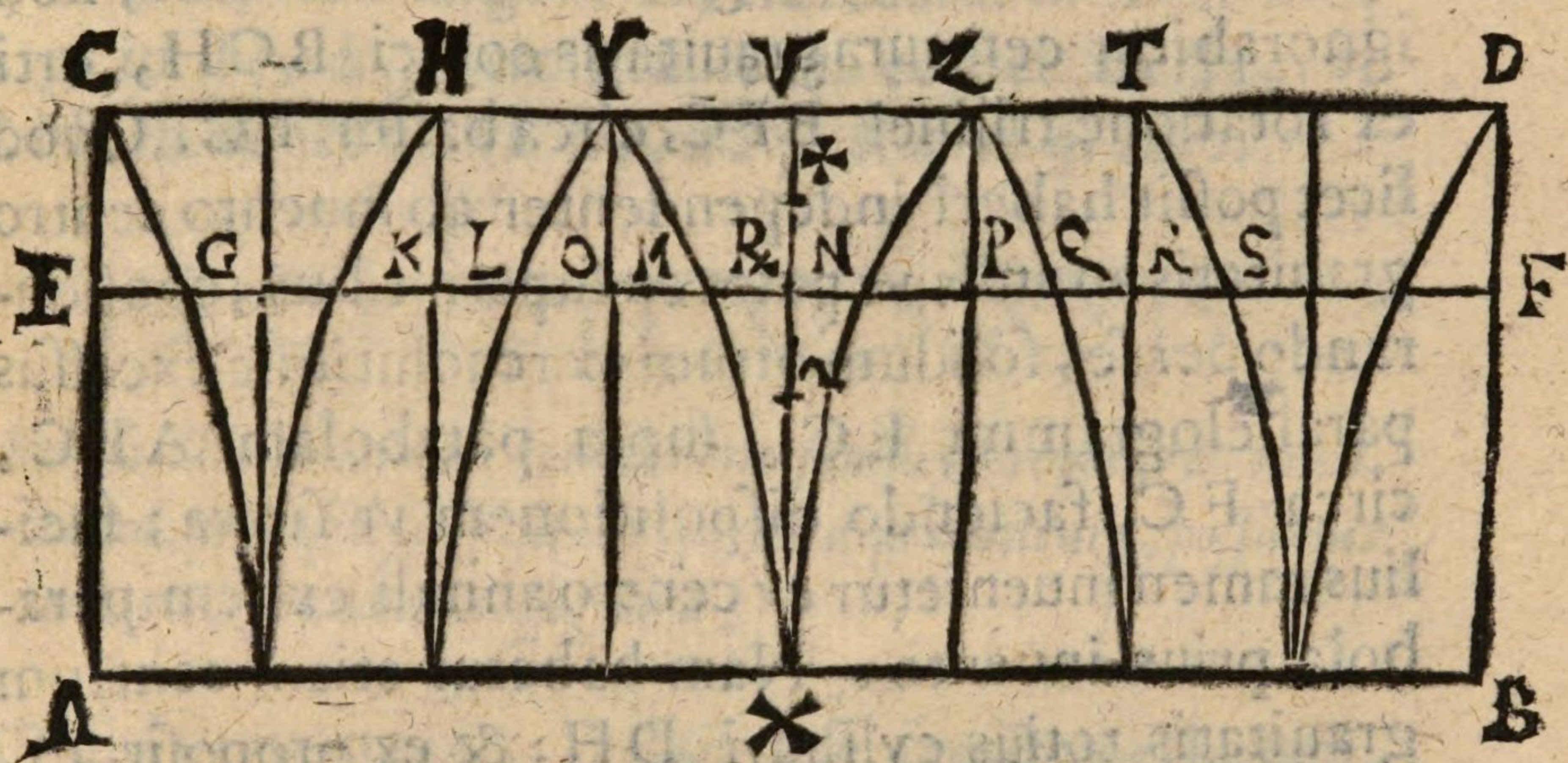
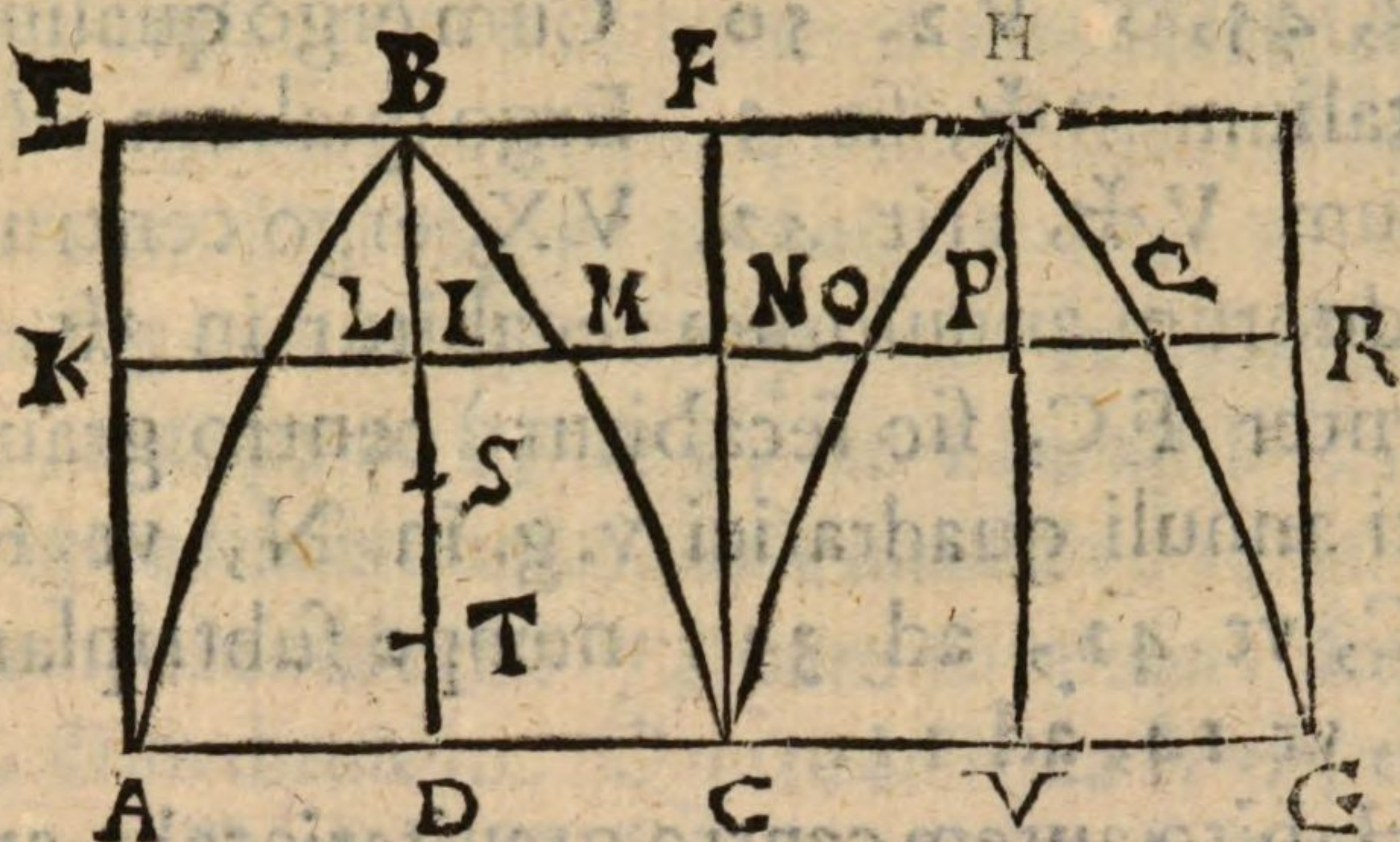
fit ad partem terminatam ad D, ut numerus parabolaë unitate auctus ad numerum parabolaë. Ergo si VX, sic secetur in R, ut sit VR, ad RX, ut numerus parabolaë, seu annuli unitate auctus, ad numerum parabolaë; erit R, centrum gravitatis solidorum quatuor simul sumptorum. Pariter, quoniam ex proposit. 14. lib. 4. centrum gravitatis conoidis ABC, sic in prima figura diuidit BD, ut

R pars

pars terminata ad B, sit ad partem terminatam ad D, vt dimidium numeri conoidis vnitate aucti, ad dimidium numeri conoidis; & cum sic in secunda figura sint disposita ex industria duo conoidea media, vt centrum grauitatis amborum simul sit in VX ; si hæc sic secetur in 2, vt sit $V2$, ad $2X$, vt dimidium numeri conoidis aucti vnitate ad dimidium numeri conoidis; erit 2, centrum grauitatis duorum conoideorum simul. Cum ergo in VX , sit centrum grauitatis tam quatuor solidorum simul, quam duorum conoideorum; ergo & in VX , erit centrum grauitatis duorum annulorum extremorum. Si ergo fiat vt duos annulos simul, ad duo conoidea simul, vel vt vnus annulus ad vnum conoides, nempe ex coroll. 3. lib. 3. vt numerus conoidis ternario auctus ad numerum conoidis vnitate auctum, sic reciprocè $2R$, ad $R\star$. Erit $\star$ centrum grauitatis duorum annulorum simul. Et si in prima figura secetur FC , in puncto in ratione $F\star$, ad $\star X$. Erit illud inuentum centrum grauitatis illius annuli. Res de se patet. Quare &c.

SCHOLIUM.

Sed nec etiam inuentio huius centri continet aliquam pulchram seriem; quilibet tamen assignabit in numeris rationem secundum quam diuiditur FC , à centro grauitatis prædicti annuli, si notabit sequentem ordinem quem tenemus in annulo semiparabolæ qua-



quadraticæ. In illa enim VX , sic fecatur in R ,
centro grauitatis quatuor solidorum simul, ut $V R$,
sit ad RX , ut 3 . ad 2 . In 2 . vero ut $V 2$, sit
ad $2X$, ut 2 , ad 1 , nempe ut 3 , cum tertia par-
te, ad 1 , cum duobus tertijs. Ergo qualium VX ,
est 5 , talium VR , est 3 , & $V 2$, est 3 , cum ter-
tia parte; $R 2$, tertia pars; & qualium VX , est
 15 , talium VR , est 9 ; $V 2$, 10 ; & $R 2$, vnitas.

R 2 Qua-

Qualium ergo R^2 , est 5, talium VX , est 75, $V R$, 45, & $V 2$, 50. Cum ergo qualium R^2 , est 5, talium R^* , sit 3. Ergo qualium VX , est 75, talium V^* , erit 42. VX , ergo centrum gravitatis duorum annulorum secabitur in * , & consequenter FC , sic secabitur à centro gravitatis prædicti annuli quadratici v.g. in N , ut FN , sit ad NC , ut 42, ad 33; nempe subtriplando terminos, ut 14, ad 11.

Habito autem centro gravitatis talis annuli, non ignorabitur centrum gravitatis conici BCH , orti ex rotatione trilinei BFC , circa basim FC . Quod licet possit haberi independententer ab inuento centro gravitatis annuli, ut patet ex superioribus, considerando per se, solidum ortum ex revolutione excessus parallelogrammi EC , supra parabolam ABC , circa FC , faciendo dispositionem ut supra; facilius tamen inuenietur ex centro annuli ex semiparabola prius inuento. Nam habetur etiam centrum gravitatis totius cylindri DH ; & ex proposit. 15. lib. 2. habetur ratio prædicti annuli ad conicum BCH . Hoc autem sic in numeris inuenietur in conico quadratico: supponamus in secunda figura (in qua faciemus operationem in VX , & quam in ipsa faciemus intelligemus factam in FC) VX , esse sectam bifariam in R , & in 2 , ut $V 2$, sit ad $2 X$, ut 14, ad 11. Ergo R , erit centrum gravitatis totius cylindri annulo circumscripti, & 2 , erit ex dictis, centrum gravitatis annuli. Ergo qualium tota

ta VX , est 25; $V2$, 14; & $2X$, 11; talium $V\Re$, erit 12, cum dimidia; & $\Re2$, 1, cum dimidia. Cum ergo ex secunda parte proposit. 15, lib. secun. sit diuidendo conicus BCH , ad annulum vt 2, ad 10, seu vt 1, ad 5; & si fiat reciprocè vt conicus, ad annulum, nempe vt 1, ad 5, sic $2\Re$, ad $\Re\ast$, sit $\ast$, centrum grauitatis conici; & cum sit vt 1, ad 5, sic vnum cum dimidio ad 7, cum dimidio. Ergo $\ast\Re$, erit 7, cum dimidio. Quare reliqua $V\ast$, erit 5, & $\ast X$, 20. Ergo VX , sic secatur in $\ast$, & FC , v. g. in N , à centro grauitatis conici BCH , vt CN , sit ad NF , vt 20, ad 5, seu vt 4. ad 1.

PROPOSITIO XXXIV.

Annuli stricti orti ex reuolutione semihyperbolæ, vt in anteced. proposit. supposita hyperbolæ quadratura, possumus centrum grauitatis assignare.

Sed supponamus DBC , esse semihyperbolam, &c. Dico etiam nos posse assignare centrum grauitatis annuli stricti ex semihyperbola DBC , circa FC . Reuoluta enim hyperbola ABC , tota circa FC , vt fiat annulus $ABCHG$, cum hic sit æqualis quatuor solidis dispositis vt in secunda figura, vt saepe dictum est; ergo ex proposit. 22. in qua assignatur centrum grauitatis in BD , hyperbolæ ABC , habebimus etiam centrum grauitatis quatuor illorum solidorum simul dispositorum. Sit hoc
cen-

centrum $\mathbb{R}$. Item ex prop. 13. & 14. habemus centrum grauitatis conoidis hyperbolici, & consequenter duorum conoideorum dispositorum vt in secunda figura. Sit hoc 2. Pariter, quoniam ex proposit. 12. habemus centrum æquilibrj semihyperbolæ DBC, in DC; habebimus etiam ex proposit. 4 lib 3. rationem quam habent solida ex semihyperbola DBC, reuoluta circa BD, & FC, ad inuicem; & consequenter habebimus rationem, quam habent in secunda figura duo solida extrema ad duo media. Si ergo fiat vt duo solida extrema ad duo media sic reciprochè 2 $\mathbb{R}$, ad $\mathbb{R}\mathbb{X}$. Erit $\mathbb{X}$, centrum grauitatis duorum annulorum simul. Vnde patet quomodo possimus habere centrum grauitatis vnus annuli soli ex semihyperbola. Quod &c.

SCHOLIUM.

Habito centro grauitatis annuli, non ignorabitur centrum grauitatis conici hyperbolici BCH; pro qua re consideretur scholium antecedentis propositionis, discursusque in ipso expositus imitetur.

Quoniam autem ex doctrinis superius traditis licet nobis colligere centra grauitatis aliquorum solidorum, de quibus nunquam geometria locuta est; ideo vt hoc expeditius fiat, opere pretium ducimus doctrinas superius traditas aptius ordinare, regulam quandam generalem exponendo. Sciendum ergo est, quatuor esse centra grauitatis, quorum tribus datis,

datis, licet quartum colligere. Nempe cētrum
 grauitatis figuræ ABC , circa diametrum: cētrum
 æquilibrīj semifiguræ DBC , in DC : cētrum
 grauitatis solidi ABC , orti ex reuolutione semi-
 figuræ ABD , circa BD : & cētrum grauitatis se-
 mifiguræ DBC , reuolutæ circa FC . Nam datis
 tribus primis, patebit dari quartum sic. Dato cen-
 tro grauitatis figuræ ABC , datur cētrum graui-
 tatis solidi orti ex gyratione ABC , circa CF ; &
 consequenter cētrum grauitatis quatuor solidorum
 dispositōrum in secunda figura. Secundo dato cen-
 tro æquilibrīj semifiguræ DBC , in DC , dabitur
 ratio solidi ex semifigura DBC , reuoluta circa DB ,
 ad solidum ex eadem reuoluta circa CF ; ex propo-
 sit. 4. lib. 3. & consequenter in secunda figura dabi-
 tur ratio duorum solidorum mediorum ad duo extre-
 ma. Tercio dato cētro grauitatis solidi ABC , da-
 bitur etiam in secunda figura cētrum duorum soli-
 dorum mediorum simul. Si ergo $\mathcal{R}$, fit cētrum
 quatuor simul, iam datum, & 2, fit cētrum duo-
 rum mediorum etiam datum, si fiat $2\mathcal{R}$, ad $\mathcal{R}\mathcal{X}$, in
 ratione data, nempe vt duo solida extrema, ad duo
 media, vel vt vnum ad vnum; erit $\mathcal{X}$ cētrum gra-
 uitatis duorum extremorum, vel vnius extremi, quod
 est quartum, quod quærebat. Ita suppositis dari
 tribus quibuscumque quatuor iam dictorum, patebit simi-
 li discursu, dari quartum. His animaduersis.

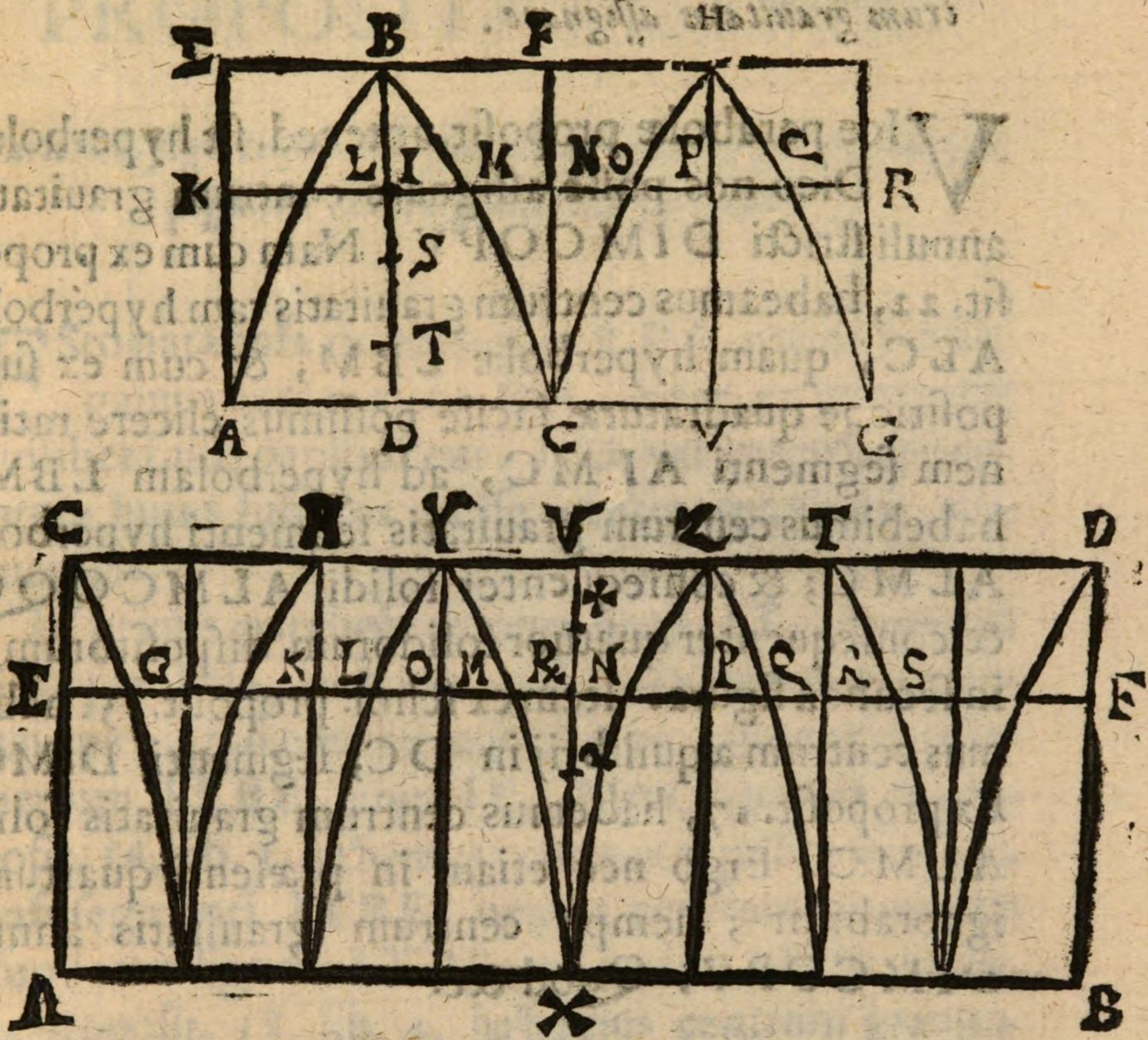
PROPOSITIO XXXV.

Annuli stricti orti ex revolutione segmenti semiparabolæ cuiuscunque, cuius exponens sit numerus par, resectæ linea basi parallela, circa lineam ductam parallelam diametro per extremitatem basis possumus centrum gravitatis assignare.

Parabola quæcunque ABC , cuius numerus par, sit secta LM , AC , parallela, & intelligamus $DIMC$, rotari circa CF . Dico annuli orti nos posse assignare centrum gravitatis. Nam cum ex proposit. 10. lib. 3. habeamus centrum gravitatis segmenti parabolæ $ALMC$, habebimus etiam ex supra dictis, centrum gravitatis annuli $ALMCOQG$; & consequenter quatuor solidorum dispositorum ut in secunda figura. Ex proposit. 11. eiusdem libri habemus centrum æquilibrij figuræ $DIMC$, in basi DC . Ex schol. proposit. 15. lib. 3. habemus centrum gravitatis solidi $ALMC$. Ergo quartum non ignorabitur; nempe centrum gravitatis solidi orti ex rotatione $DIMC$, circa NC . Quod &c.

SCHOLIUM.

Cum autem habeamus centrum gravitatis cylindri IV; & rationem ex schol. 2. proposit. 11. lib. 3. quam



3. quam habet cylindrus IV, ad conicum MCO;
habemus etiam in NC, centrum grauitatis talis
conici.

PROPOSITIO XXXVI.

*Annuli stricti orti ex rotatione segmenti semihyperbole re-
sectæ linea basi parallela (supposita segmenti quadratu-*

ra)

ra) modo in proposit. anteced. explicato, possumus centrum grauitatis assignare.

VIce parabolæ proposit. anteced. sit hyperbola. Dico nos posse assignare centrum grauitatis annuli stricti $DMCOPV$. Nam cum ex proposit. 22, habeamus centrum grauitatis tam hyperbolæ ABC , quam hyperbolæ IBM , & cum ex suppositione quadraturæ facile possimus elicere rationem segmenti $ALMC$, ad hyperbolam IBM ; habebimus centrum grauitatis segmenti hyperbolæ $ALMC$; & consequenter solidi $ALMCOQG$; & consequenter quatuor solidorum dispositorum vt in secunda figura. Item ex schol. proposit. 15, habemus centrum æquilibrij in DC , segmenti DMC . Ex proposit. 17, habemus centrum grauitatis solidi $ALMC$. Ergo nec etiam in præsentī quartum ignorabitur; nempe centrum grauitatis annuli $DMCOPV$. Quod &c.

SCHOLIUM.

Ex prædicto centro inuento, & ex ratione cylindri IV , reperta in citato schol. proposit. 15, per conuersionem rationis, ad conicum MCO , reperiemus in NC , centrum grauitatis conici MCO , prædicti.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

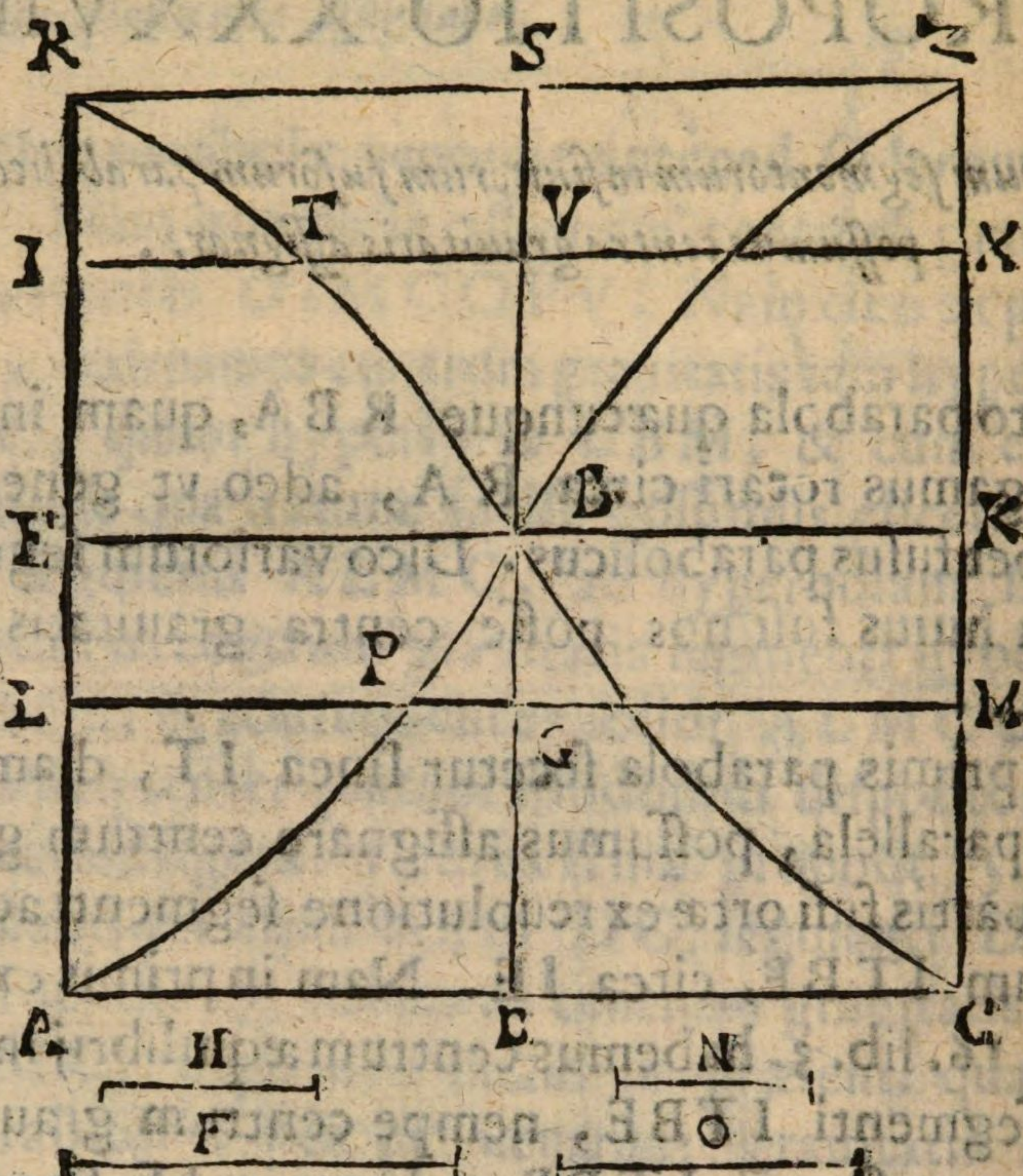
*Variorum segmentorum infinitorum fusorum parabolicorum,
possumus centra gravitatis assignare.*

ESto parabola quæcunque RBA , quam intelligamus rotari circa RA , adeo ut generetur quilibet fusus parabolicus. Dico variorum segmentorum huius fusi nos posse centra gravitatis assignare.

In primis parabola secetur linea IT , diametro EB , parallela, possumus assignare centrum gravitatis partis fusi ortæ ex revolutione segmenti ad diametrum $ITBE$, circa IE . Nam in primis ex proposit. 16. lib. 3. habemus centrum æquilibrij in IE , basi segmenti $ITBE$, nempe centrum gravitatis duplicatæ figuræ $ITBE$, ad partes IE . Secundo, ex proposit. 18. lib. 4. habemus centrum gravitatis portionis annuli orti ex revolutione segmenti $ITBE$, circa BV . Tertio ex schol. 3. proposit. 15. lib. 3. habemus centrum segmenti $ITBE$, in EB , nempe habemus rationem, quam habet solidum ex $ITBE$, segmento revoluto circa VB , ad solidum ex eodem segmento revoluto circa IE . Ex istis tribus centris datis, ad modum superiorum deducemus quartum, nempe centrum gravitatis segmenti fusi ex $ITBE$, segmento revoluto circa IE .

S 2

Secundo



Secundo fecetur parabola etiam LP , EB , diametro parallela, adeo ut IT , LP , intercipient diametro, possumus assignare centrum gravitatis segmenti intermedij fusi orti ex revolutione segmenti intermedij $ITBPL$, revoluti circa IL . Nam ex proposit. 21. lib. 3. habemus centrum gravitatis duplicatae figurae $ITBPL$, ad partes IL . Secundo ex proposit. 22. eiusdem lib. habemus centrum aequilibrij segmenti in LG ; nempe rationem solidorum

141

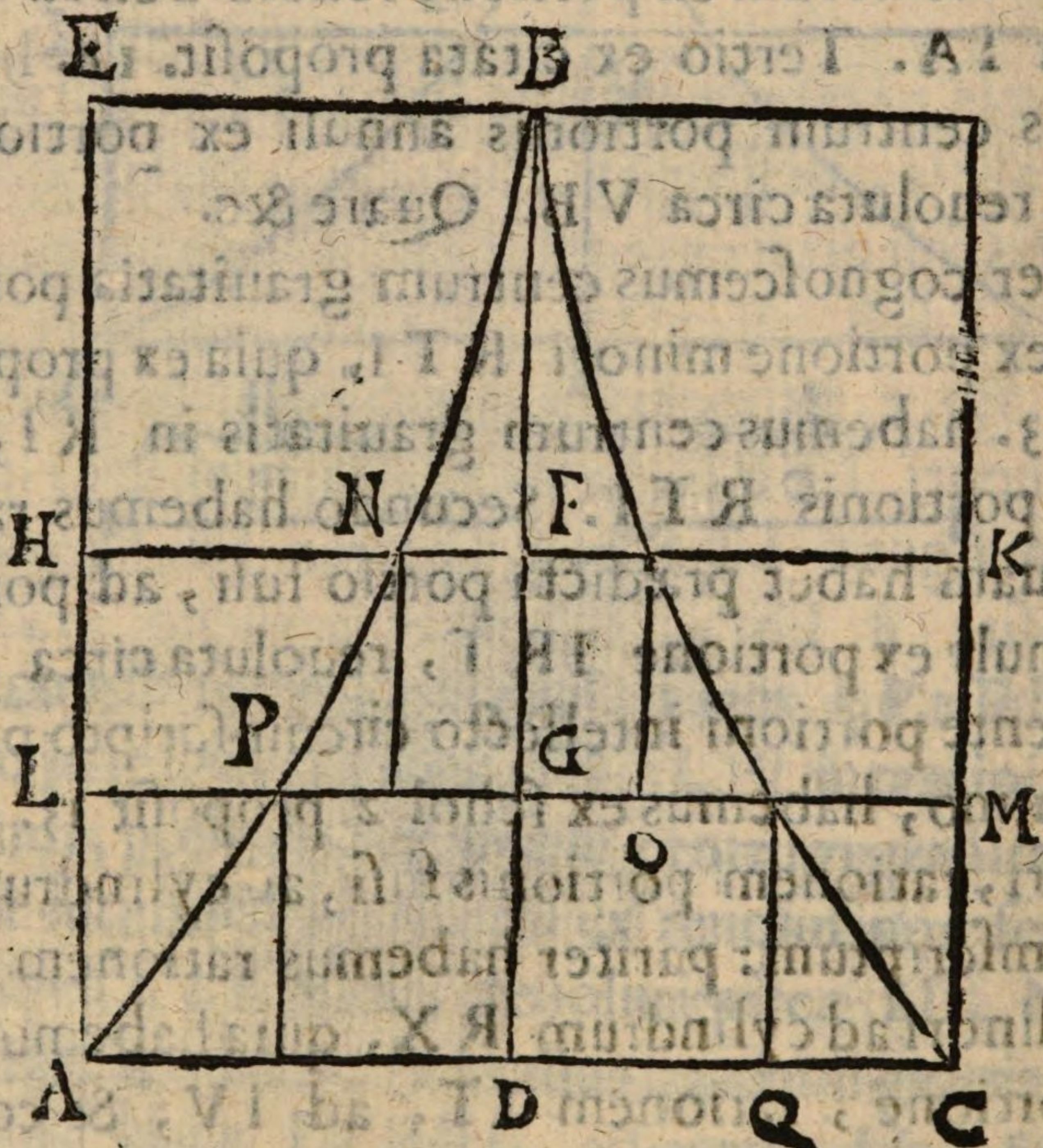
dorum reuolutorum circa VG , & IL . Tertio ex
proposit. 18. lib. 4. habemus centrum grauitatis seg-
menti annuli ex segmento $ITBPL$, reuoluto cir-
ca VG . Ergo quartum, nempe centrum segmen-
ti fusi ex eodem segmento circa LI , non ignora-
bitur.

Sic cognoscemus centrum grauitatis portionis
fusi ex portione maiori $ITBA$. Nam centrum
grauitatis duplicatae portione habetur ex proposit.
19. lib. 3. Ex proposit. 20. eiusdem libri, habemus
rationem solidorum ex portione reuoluta circa VB ,
& circa IA . Tertio ex citata proposit. 18. lib. 4.
habemus centrum portione annuli ex portione
 $ITBA$, reuoluta circa VB . Quare &c.

Pariter cognoscemus centrum grauitatis portio-
nis fusi ex portione minori RTI , quia ex proposit.
14. lib. 3. habemus centrum grauitatis in RI , du-
plicatae portione RTI . Secundo habemus ratio-
nem, quam habet praedicta portio fusi, ad portio-
nem annuli ex portione IRI , reuoluta circa SV .
Quia mente portioni intellecto circumscripto paral-
lelogrammo, habemus ex schol. 2. proposit 15. eius-
dem libri, rationem portione fusi, ad cylindrum si-
bi circumscriptum: pariter habemus rationem pra-
dicti cylindri ad cylindrum RX , quia habemus, ex
data portione, rationem IT , ad IV ; & conse-
quenter quadrati IT , ad quadratum IV : item
habemus ex schol. 2. proposit 4. lib. 4. rationem cy-
lindri RX , ad portionem annuli ex portione RTI ,
circa

circa SV . Vnde ex æquali, habemus rationem portionis fusi ad portionem annuli. Tertio habemus centrum grauitatis prædictæ portionis annuli ex cit. prop. 18. lib. 4. Ergo quartum, nempe centrum grauitatis portionis fusi non ignorabitur.

Sed nec in sequenti figura, supposita femiparabola EBA , secta duabus lineis HN , LP , diametro EB , parallelis, ignorabimus centrum grauitatis segmenti fusi ex segmento intermedio $HNPL$.



Nam

Nam centrum gravitatis in HL , duplicati segmenti ad partes HL , habetur ex proposit. 17. libri 3. Item ex præcitata proposit. 18. lib. 4. habemus centrum gravitatis segmenti annuli ex segmento $HNP.L$, circa BD . Tertium nempe ratio segmenti fusi ad segmentum annuli patebit haberi. Quia habemus ex schol. proposit. 18. lib. 3. rationem segmenti fusi ad cylindrum ex parallelogrammo LN , sibi circumscripto; sed habemus rationem talis cylindri ad cylindrum HM , & huius ex præcit. schol. 2. proposit. 4, lib. 4. ad segmentum annuli. Quare ex æquali, patet propositum. Cognitis verò tribus præcedentibus, quartum centrum quæsitum innotescet. Patuit ergo propositum in omnibus prædictis partibus.

SCHOLIUM.

Sicuti autem in antecedentibus reperta sunt centra gravitatis variorum segmentorum infinitorum fusorum parabolicorum, sic ex supposita quadratura hyperbolæ, eiusque segmentorum, liceret reperire tam centra gravitatis variorum segmentorum hyperbolæ quam variorum segmentorum fusi ex hyperbola, quod indicasse lectori sufficiat.

Ex superius ergo dictis patuit quot sint ea, quæ deducuntur ex proposit. 30. superiori, sed insuper alia possunt deduci nempe tres regulæ uniuersales in tribus sequentibus proposit. exprimendæ.

PRO-

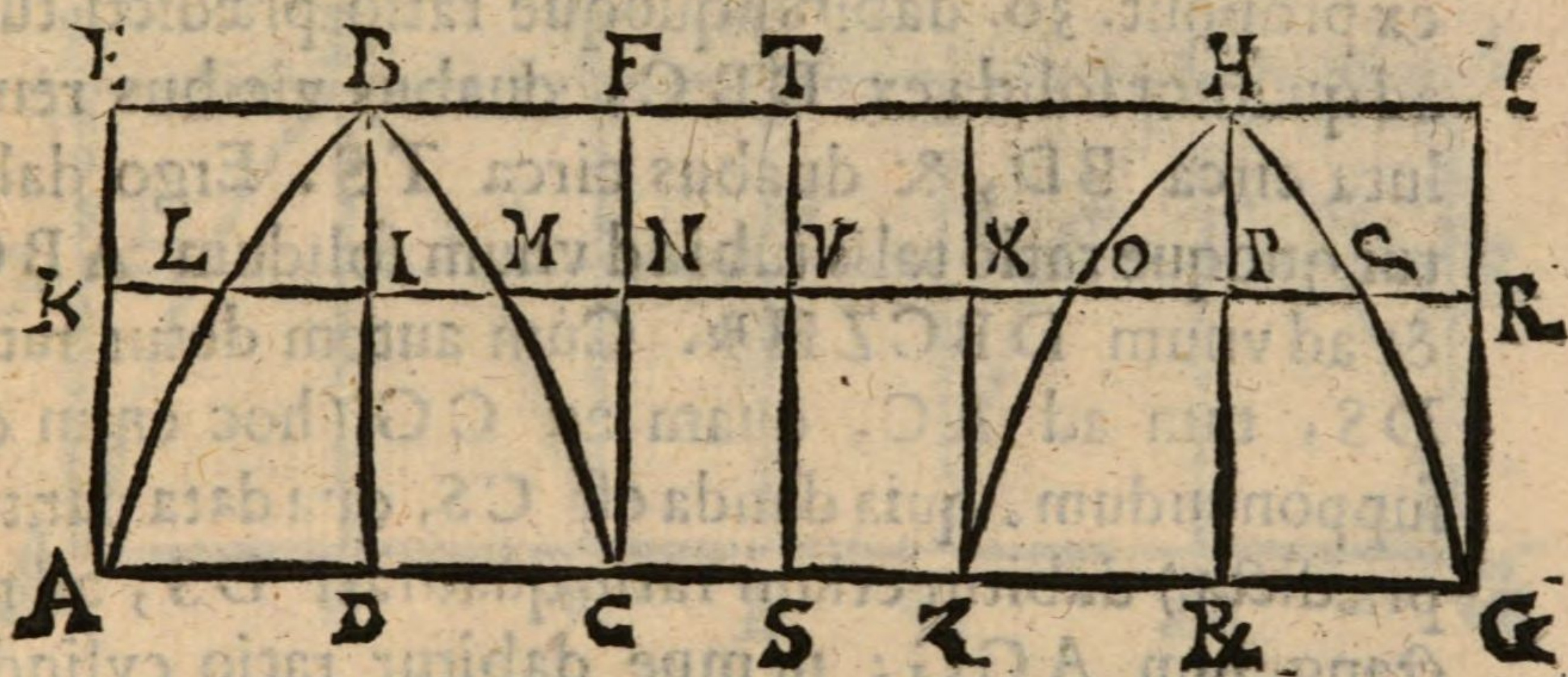
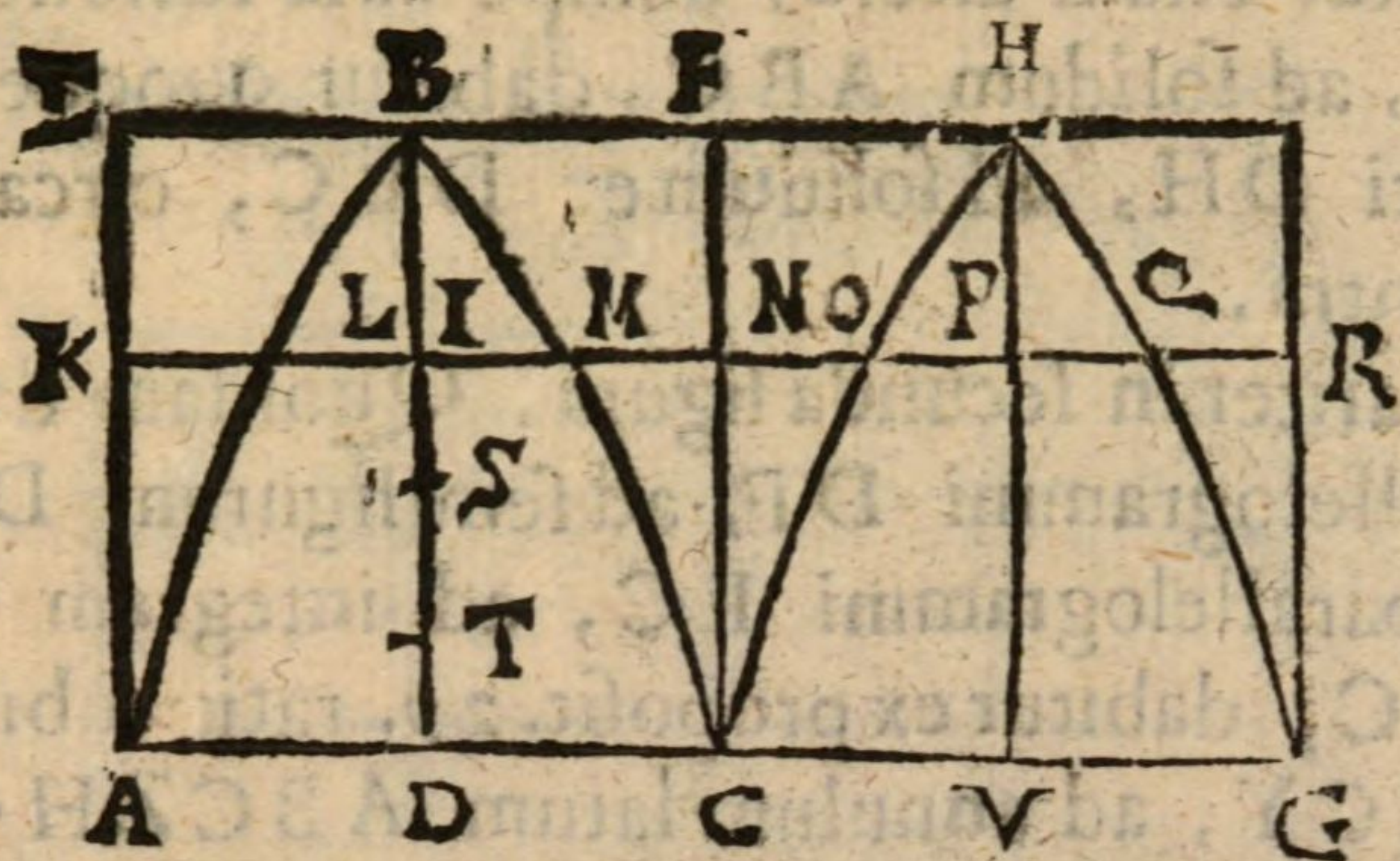
PROPOSITIO XXXVIII.

Data cuiuscunque semifigura circa diametrum quadratura, dataque ratione cylindri circumscripti solido ex semifigura reuoluta siue circa diametrum, siue circa ductam diametro parallelam, vel per extremitatem basis, vel extra figuram. Datur ratio cylindri circumscripti altero dictorum solidorum ad ipsum.

SIt data quælibet semifigura DBC , circa diametrum BD , & data sit ratio quam habet parallelogrammum BC , ad ipsam figuram; insuper detur ratio, quam habet cylindrus ex BC , in prima figura, reuoluto siue circa DB , siue circa FC , ad alterum solidorum ex semifigura DBC , siue circa BD , siue circa FC : vel in secunda figura detur vel ratio cylindri EC , ad solidum ABC , vel cylindri DH , ad solidum ex DBC , reuoluta circa TS . Dico dari etiam rationem alterius cylindri, ad alterum solidum ex semifigura.

Probetur prius in prima figura, in qua intelligamus parallelogrammum EC , cum figura integra ABC , rotari circa FC . Ergo ex proposit. 29. cum data sit ratio ex hypothese, parallelogrammi EC , ad figuram ABC , dabitur quoque ratio cylindri EG , ad solidum $ABCHG$. Sed tale solidum ex proposit. 30. æquatur duobus solidis ex DBC , circa DB , & duobus, ex eadem circa FC .

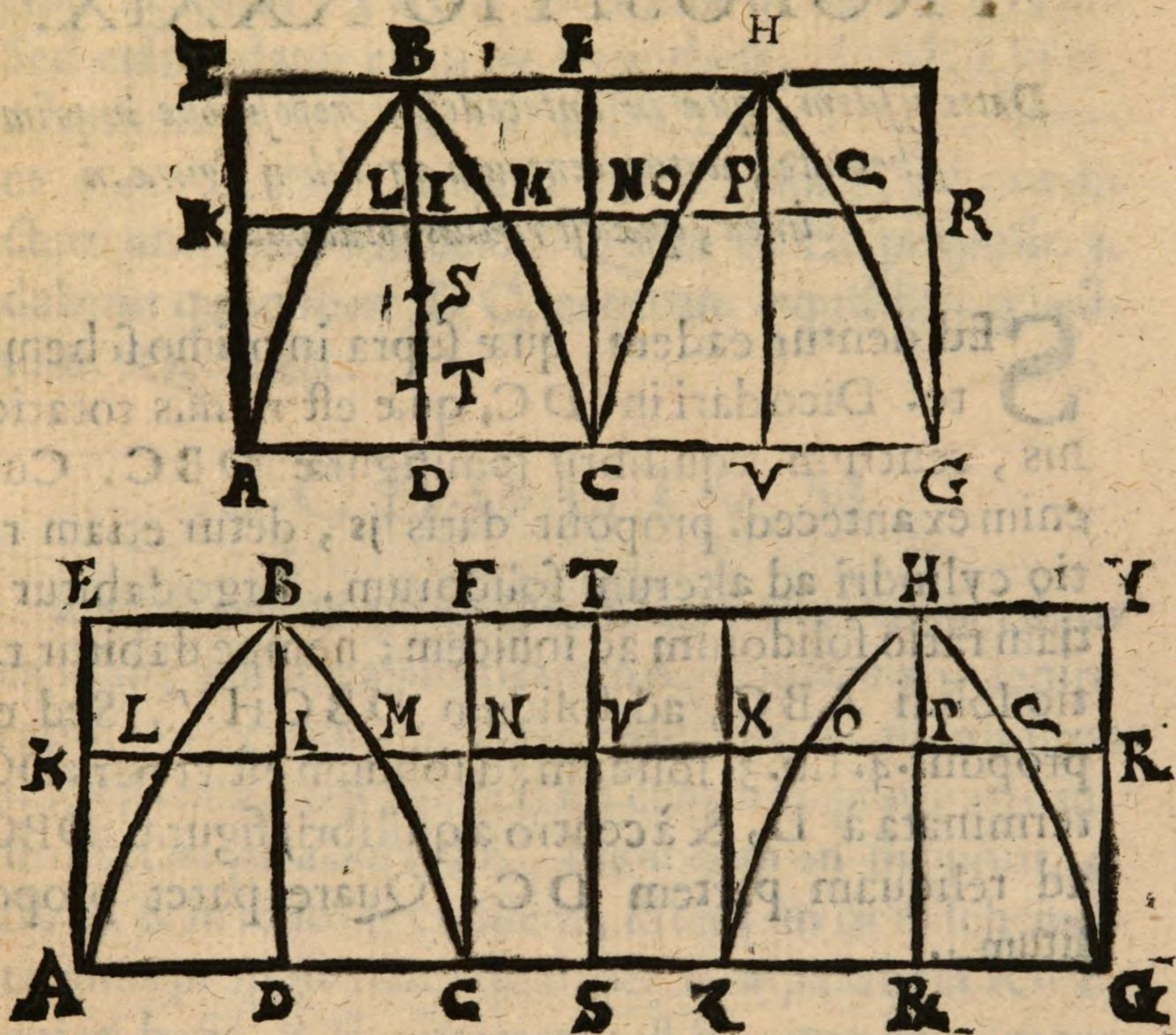
Ergo



Ergo dabitur quoque ratio cylindri EG, ad hæc
 quatuor solida. Ergo & cylindri EC, qui est
 quarta pars cylindri EG, ad eadem quatuor soli-
 da. Ergo dabitur quoque ratio cylindri EC, seu
 ei æqualis, DH, ad duo tantum illorum solido-
 rum, scilicet ad vnum, & vnum, nempe ad vnum
 circa DB, & ad vnum circa FC. Sed ex hypothe-
 si, datur quoque ratio cylindri EC, seu DH, ad
 alterum tantum solidorum ex DBC, reuoluta siue
 T circa

circa DB , siue circa FC . Ergo quacunque data, dabitur etiam altera; nempe data ratione cylindri EC , ad solidum ABC , dabitur quoque ratio cylindri DH , ad solidum ex DBC , circa FC , & è contra.

Pariter in secunda figura. Quoniam datur ratio parallelogrammi DF , ad semifiguram DBC , siue parallelogrammi EC , ad integram figuram ABC , dabitur ex proposit. 29. ratio tubi cylindrici ECY , ad annulum latum $ABCZH G$. Ergo ex proposit. 30. dabitur quoque ratio prædicti tubi ad quatuor solida ex DBC , duabus vicibus reuoluta circa BD , & duabus circa TS . Ergo dabitur quoque ratio talis tubi ad vnum solidum ABC , & ad vnum $DBCZH R$. Cum autem detur ratio DS , tam ad AC , quam ad CG (hoc enim est supponendum, quia danda est CS , qua data dantur prædicta) dabitur etiam ratio quadrati DS , ad rectangulum ACG ; nempe dabitur ratio cylindri DH , ad tubum cylindricum ECY . Ergo ex æquali, dabitur quoque ratio cylindri $B R$, ad solidum ABC , simul cum solido $DBCZH R$. Si ergo detur etiam ex hypothese, ratio cylindri EC , ad solidum ABC , quia cum detur ratio cylindri DH , ad cylindrum EC , datur etiam ratio cylindri DH , ad solidum ABC . Ergo dabitur quoque ratio eiusdem cylindri DH , ad solidum $DBCZH R$. Si vero detur ratio ex hypothese, cylindri DH , ad solidum $DBCZH R$; ergo dabitur quoque ratio eiusdem



iustem cylindri ad solidum ABC . Sed etiam datur ratio cylindri EC , ad cylindrum DH . Ergo quoque ex æquali, dabitur ratio cylindri EC , ad solidum ABC . Ergo in omnibus patuit propositio.

PROPOSITIO XXXIX.

Datis ijsdem, quæ in antecedenti propositione in primo schemate, datur centrum æquilibrij figuræ in linea, quæ est radius rotationis.

Sed dentur eadem, quæ supra in primo schemate. Dico dari in DC , quæ est radius rotationis, centrum æquilibrij semifiguræ DBC . Cum enim ex anteced. proposit. datis ijs, detur etiam ratio cylindri ad alterum solidorum. Ergo dabitur etiam ratio solidorum ad inuicem; nempe dabitur ratio solidi ABC , ad solidum $DBCHV$. Sed ex proposit. 4. lib. 3. solidum ad solidum est vt pars DC , terminata à D , & à centro æquilibrij figuræ DBC , ad reliquam partem DC . Quare patet propositum.

PROPOSITIO XL.

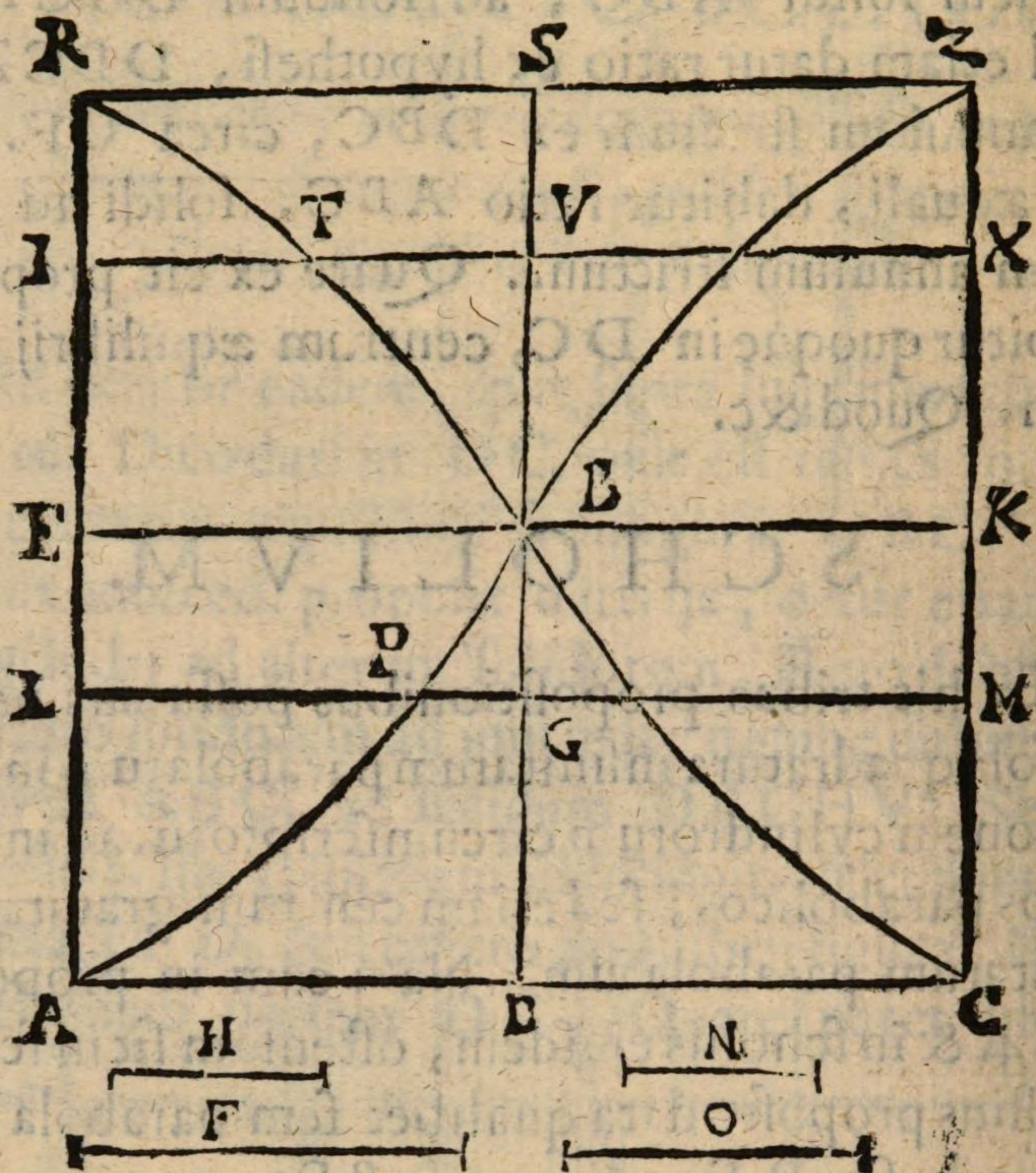
Si secundo schemate datis ijsdem, & data ratione annuli lati ex sem. figura ad annulum strictum eiusdem, dabitur prædictum centrum.

Sed in secundo schemate, ultra data in antecedenti, detur etiam ratio annuli lati $DBCH$, ad annulum strictum ex eadem DBC , reuoluta circa FC . Dico dari eius centrum æquilibrij

librij in DC . Nam eodem modo patebit, dati rationem solidi ABC , ad solidum $DBCZH$. Sed etiam datur ratio ex hypothesi, $DBCZH$, ad annulum strictum ex DBC , circa CF . Ergo ex æquali, dabitur ratio ABC , solidi ad prædictum annulum strictum. Quare ex cit. proposit. 3. dabitur quoque in DC , centrum æquilibrij quæsitum. Quod &c.

SCHOLIUM.

Ex his tribus propositionibus possumus necdum ex sola quadratura infinitarum parabolarum inuenire rationem cylindrorum circumscriptorū, ad infinitos fusos parabolicos; sed etiam centrum grauitatis infinitarum parabolarum. Nam cum in proposit. 4. lib. 4. & in scholijs eiusdem, ostensum sit in schema-
te illius proposit. data qualibet semiparabola RBE , cuius basis RE , diameter BE , quæ reuoluatur cum sibi circumscripto parallelogrammo RB , circa BS : cylindrum RK , esse ad solidum $ERBZk$, vt parallelogrammum RB , ad semiparabolam ERB , cuius basis ER , diameter EB , quæ sit gradus dupli, gradus semiparabolæ reuolutæ circa SB ; patet ex data quadratura infinitarum parabolarum, dari rationem cylindri RK , ad annulum $ERBZk$. Data hac ratione, dabitur etiam ex proposit. anteced. ratio cylindri Rk , vel ei æqualis orti ex RB , circa RE , ad solidum ex ERB , circa RE ,



RE; nempe ad semifusum parabolicum. His datis dabitur etiam ratio illorum solidorum ad inuicem; & consequenter centrum æquilibrij semiparabolæ **ERB**, in **EB**; & consequenter centrum grauitatis parabolæ **RBA**, in diametro **BE**.

Sed hic notetur, parabolas inseruientes inuentioni centri grauitatis infinitarum parabolarum, non esse omnes, sed illas dumtaxat, quarum exponentes sunt numeri pares; quia hæ dumtaxat inseruiunt inuentioni

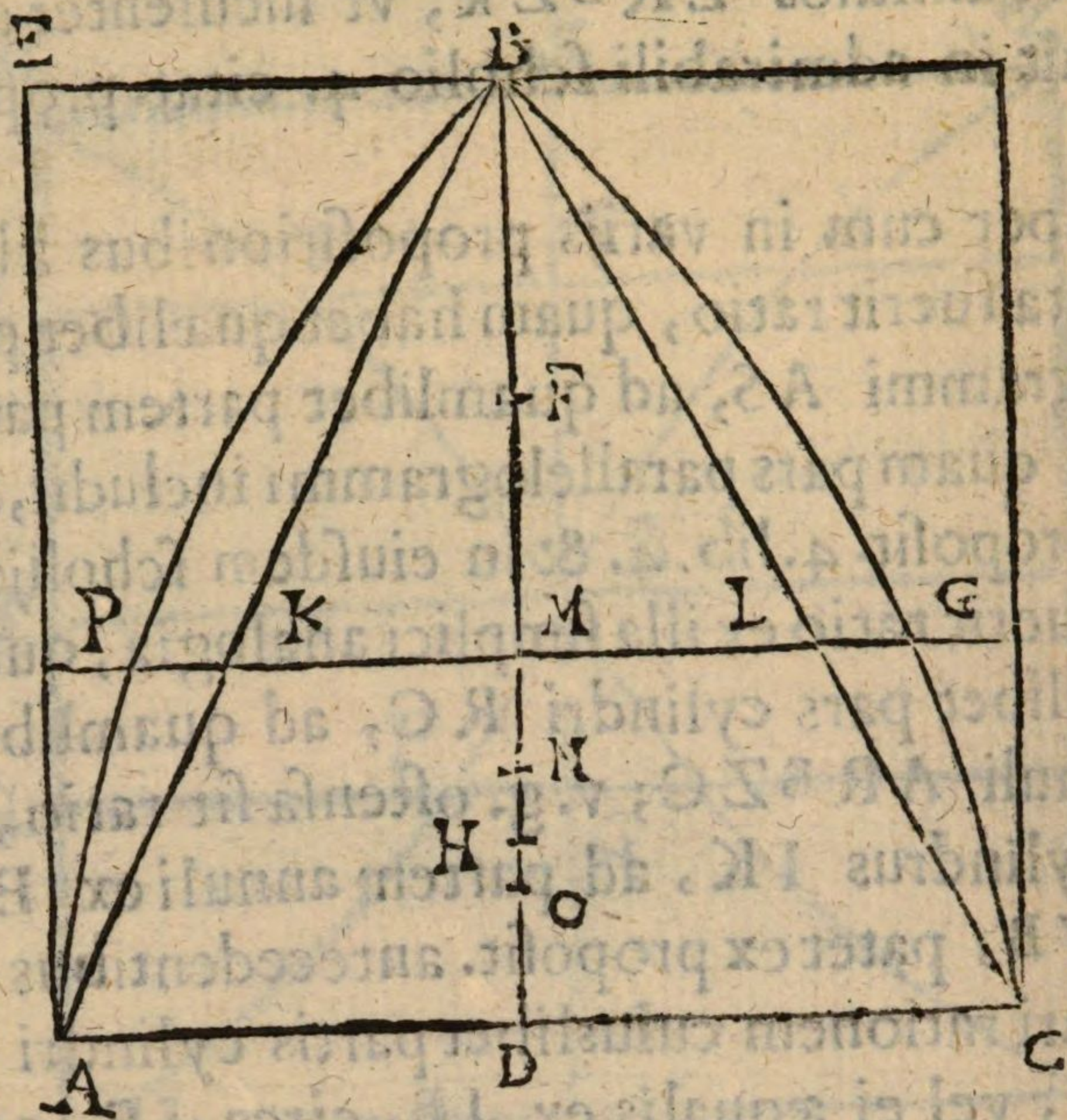
151

uentioni rationis infinitorum cylindrorum RK , ad infinitos annulos $ERBZk$, vt luculenter explicatum fuit in admirabili scholio 4. citat. proposit. 4. lib. 4.

Insuper cum in varijs propositionibus lib. prim. assignata fuerit ratio, quam habet quælibet pars parallelogrammi AS , ad quamlibet partem parabolæ RBA , quam pars parallelogrammi includit, & cum in cit. proposit. 4. lib. 4. & in eiusdem scholijs, assignata fuerit ratio ex illa simplici analogia, quam habet quælibet pars cylindri RC , ad quamlibet partem annuli $ARBZC$; v. g. ostensa sit ratio, quam habet cylindrus IK , ad partem annuli ex $ELTB$, circa VB ; patet ex proposit. antecedentibus, necdum dari rationem cuiuslibet partis cylindri RC , v. g. Ik , vel ei æqualis ex IB , circa IE , ad partem fusi ex $ITBE$, circa IE : sed etiam dari in BE , vel in VI , centrum æquilibrij segmenti $ITBE$, vel grauitatis duplicati segmenti ad partes BE , vel IV .

In proposit. autem 3. lib. 4. patuit cylindrum EC , esse ad quodlibet conoides parabolicum ABC , cuius exponens sit numerus par, vt parallelogrammum EC , ad parabolam ABC , cuius exponens sit subduplus exponentis conoidis. Quare, vt ibidem patuit, infinitæ parabolæ non inseruierunt inuentioni rationi infinitorum cylindrorum ad infinita conoidea, sed tantum ad ea, quorum exponentes sunt numeri pares. Eliciemus ergo ex antecedentibus

bus



bus propositionibus, inferuire infinitas parabolas inuentioni rationi cylindrorum EC , vel eis æqualium factorum ex ED , circa EA , ad annulos ex ABD , circa AE , quorum exponentes sint numeri pares. Pariter eliciemus nos ex his habere centrum æquilibrij in basi AD , semiparabolarum ABD , quarum exponentes sunt numeri pares, & non omnium.

Patet ergo ex dictis, aliquod admirabile, & non minus eo, quod expositum fuit in prædicto schol. 4. proposit. 4. lib. 4. Hoc autem est, quod infinitæ parabolæ inferuiunt tam inuentioni centri grauitatis infinitarum

finitarum parabolarum in diametro, quam inuentioni centri æquilibrij infinitarum semiparabolarum in basi. At inuenimus centra grauitatis infinitarum parabolarum in diametro non adhibendo infinitas parabolas, sed illas tantum, quarum exponentes sunt numeri pares. E contra verò adhibendo infinitas parabolas, non inuenimus centra æquilibrij in basi infinitarum semiparabolarum, sed illarum tantum, quarum exponentes sunt numeri pares.

Ex cit. autem proposit. 3. lib. 4. & ex schol. eiusdem, possumus ex proposit. anteced. elicere rationem, quam habet cylindrus ex AM , circa EA , ad partem annuli ex $APMD$, circa EA , cuius exponentis sit numerus par. Et insuper centrum æquilibrij in AD , segmenti $APMD$, semiparabolæ ABD , cuius exponens itidem sit numerus par. Hæc autem facile patent ex dictis.

Quot igitur solidorum manifestata sint centra grauitatis, potuit lector ex dictis cognoscere. Sed nolumus sub silentio relinquere aliqua, quæ nobis scitu digna videntur.

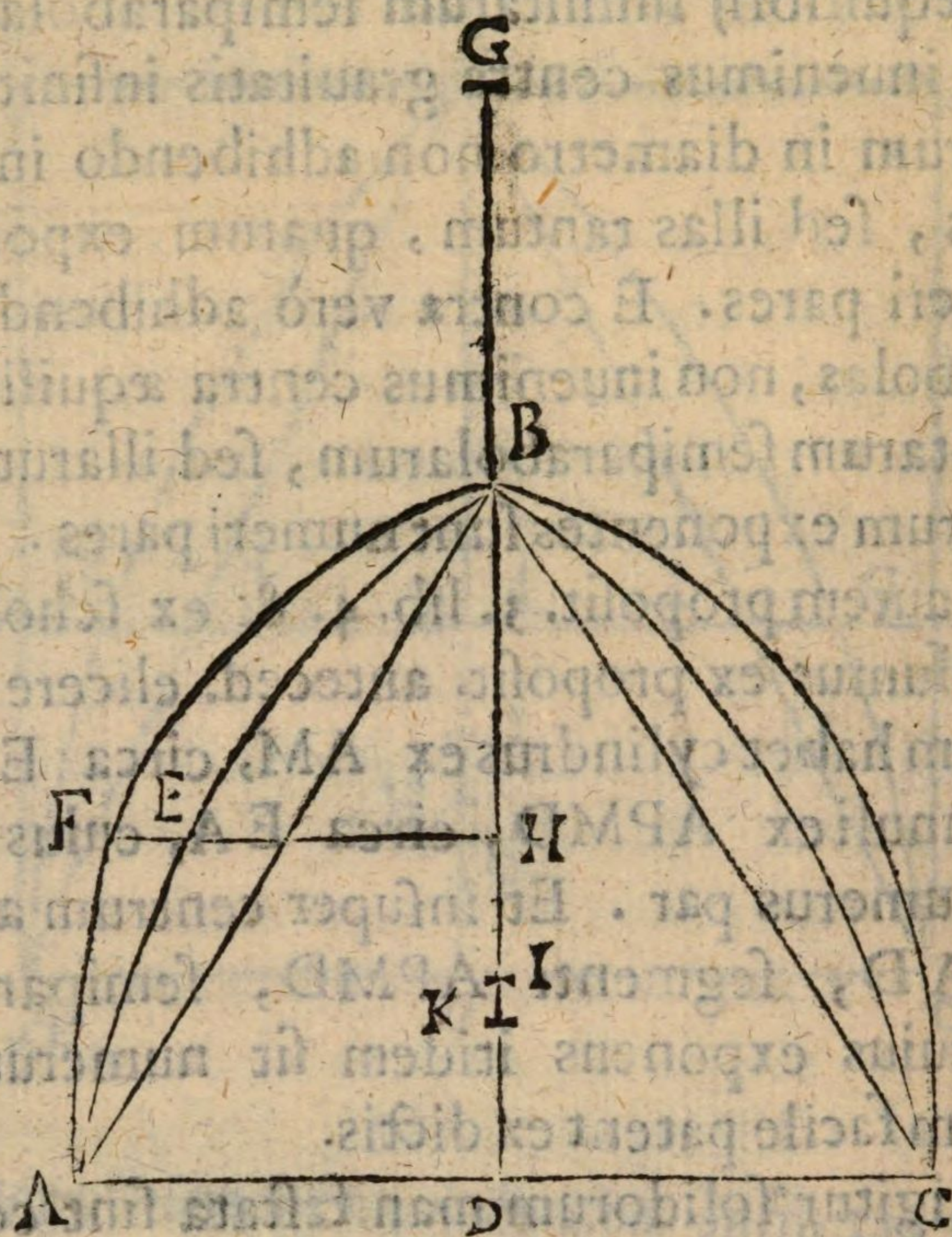
PROPOSITIO XLI.

Si super eadem basi, & circa eandem diametrum sint semihyperbola, & semiparabola. Tota semihyperbola cadet intra semiparabolam.

Sint semihyperbola $AEBD$, & semiparabola $A F B D$, quarum eadem basis AD , eadem-

V

que



que diameter BD . Dico totam semihyperbolam
cadere intra semiparabolam. Sit GB , latus trans-
uersum hyperbolæ, & accepto in BD , arbitrariè
puncto H , ordinatim applicetur HEF . Quo-
niam enim in hyperbola est ex primo conic. propo-
sit. 21. ut quadratum EH , ad quadratum AD , sic
rectangulum GHB , ad rectangulum GDB : &
in parabola est ex proposit. 20. eiusdem lib. quadra-
tum AD , ad quadratum FH , ut DB , ad BH ;
nempe ut rectangulum GDB , ad rectangulum.

sub

sub GD , in BH : ergo ex æquali, erit quadratum EH , ad quadratum FH , vt rectangulum $GH B$, ad rectangulum sub GD , in BH . Sed rectangulum $GH B$, minus est rectangulo sub GD , in BH . Ergo & quadratum EH , minus erit quadrato FH . Ergo & EH , minor erit FH . Punctum autem H , sumptum fuit arbitrariè. Ergo omnes lineæ hyperbolæ minores erunt singulis lineis parabolæ. Patet ergo propositum.

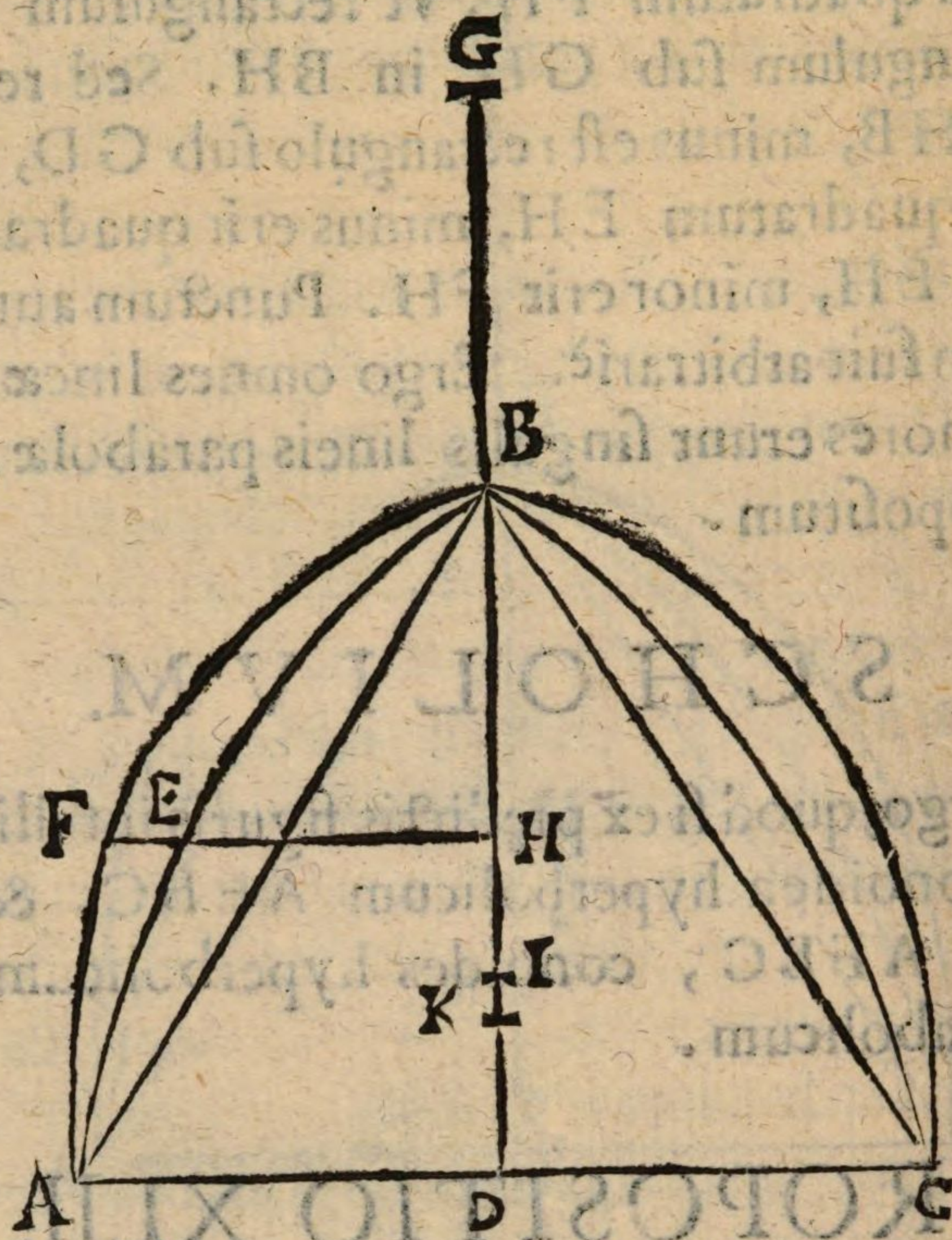
SCHOLIUM.

Patet ergo, quod si ex prædictis figuris intelligantur genita conoidea hyperbolicum $A E B C$, & parabolicum $A F B C$, conoides hyperbolicum cadet intra parabolicum.

PROPOSITIO XLII.

Differentiæ supradictorum conoideorum centrum grauitatis est medium punctum diametri.

Sint ergo vt in proposit. anteced. conoidea hyperbolicum $A E B C$, & parabolicum $A F B C$. Dico centrum grauitatis excessus conoidis parabolici supra conoides hyperbolicum esse in medio BD . In conoidibus inscribatur conus $A B C$. Cum ergo ex schol. proposit. 4. sit in medio BD , centrum grauitatis tam totius, nempe excessus conoidis pa-



parabolici supra conum $A B C$, quam partis; nempe
 excessus conoidis hyperbolici supra eundem conum.
 Ergo & reliquæ partis, nempe excessus conoidis pa-
 rabolici supra conoides hyperbolicum erit centrum
 gravitatis in medio $B D$. Quod &c.

SCHOLIUM.

Sed cum in præfenti occurrerit modus alius com-
 pendiosus assignandi centrum gravitatis conoidis hyper-

hyperbolici diuersus ab illis, quos tradidimus supra in proposit. 13. & 14. nolumus ipsum omittere, sed præmittenda est sequens propositio eius manifestationi.

PROPOSITIO XLIII.

Differentia supradictorum conoideorum, est ad conoides hyperbolicum ut sexta pars diametri ad tertiam partem eiusdem, una cum dimidio lateris transuersi.

IN schemate superiori. Dico excessum conoidis parabolici $A F B C$, supra conoides hyperbolicum $A E B C$, esse ut sexta pars $D B$, ad tertiam partem $D B$, cum dimidio $G B$. Quoniam enim ut elicitur ex proposit. 15. lib. 2. conoides parabolicum est sesquialterum coni $A B C$; ergo erit ad ipsum ut $G D$, ad duo tertia $G D$; nempe ut dimidium $G D$, ad tertiam partem $G D$. Rursum cum ex proposit. 5. 7. & 11. sit cylindrus conoidi hyperbolico circumscriptus, ad ipsum, ut $G D$, ad dimidiam $G B$, cum tertia parte $D B$; erit conus $A B C$, tertia pars cylindri, ad conoides hyperbolicum, ut tertia pars $G D$, ad dimidiam $G B$, cum tertia parte $D B$. Quare ex quali, erit conoides parabolicum ad conoides hyperbolicum ut dimidium $G D$, ad dimidium $G B$, cum tertia parte $B D$. Ergo & diuidendo, erit differentia conoideorum ad conoides

des hyperbolicum vt sexta pars DB , ad dimidium GB , cum tertia parte DB . Quod &c.

PROPOSITIO XLIV.

Centrum grauitatis conoidis hyperbolici sic diuidit ipsius diametrum vt pars ad verticem sit ad reliquam, vt latus transuersum cum subsestertia diametri, ad dimidium lateris transuersi cum quarta parte diametri.

ESto in schemate antecedenti conoides hyperbolicum $A E B C$, cuius diameter DB , latus transuersum GB , & sit k , eius centrum grauitatis. Dico BK , ad kD , esse vt GB , cum subsestertia BD , ad dimidiam GB , cum quarta parte DB . Est conoides parabolicum $A F B C$; & sit H , medium punctum BD , adeo vt sicuti elicitur ex propo. 42. sit centrum grauitatis differentiae conoideorum: pariter BI , sit dupla ID , adeo vt sit I , ex proposit. 14. lib. 4. centrum grauitatis conoidis parabolici. Si ergo fiat HI , ad Ik , vt dimidium GB , cum tertia parte BD , ad sextam partem BD ; nempe ex proposit. anteced. reciproce vt conoides hyperbolicum ad excessum conoidis parabolici supra ipsum, erit k , centrum conoidis hyperbolici. Tunc argumentetur sic. Quoniam BI , quadrupla est IH , ergo BI , erit ad Ik , vt dupla GB , vna cum sestertia BD , ad sextam partem BD . Et componendo erit BK , ad kI , vt dupla GB , vna cum sesterti-

sesquitertia BD , & cum sexta parte eiusdem, ad sextam partem eiusdem. Cum autem DI , sit dupla IH , erit kl , ad ID , ut sexta pars BD , ad GB , cum duabus tertijs partibus BD . Et diuidendo, erit Ik , ad kD , ut sexta pars BD , ad GB , cum dimidia BD . Quare ex æquali, erit Bk , ad kD , ut dupla GB , cum sesquitertia BD , & cum sexta parte eiusdem, ad GB , cum dimidia BD . Et ut horum terminorum dimidia. Ergo Bk , erit ad kD , ut GB , cum subsesquitertia DB , ad dimidiam GB , cum quarta parte BD . Quod &c.

SCHOLIUM.

In nostro libello 60, problematum geometricorum ostendimus in propofit. 53. quandam proprietatem communem conoidibus parabolico, & hyperbolico, portionibus sphaeræ, & sphaeroidis, & etiam cono. Alia proprietas communis omnibus prædictis solidis reperitur circa illorum grauitatis centrum. Hanc in sequentibus patefaciemus, sed prius ostendamus aliqua, quæ utique non videntur turpiora, & sunt præmitenda.

PROPOSITIO XLV.

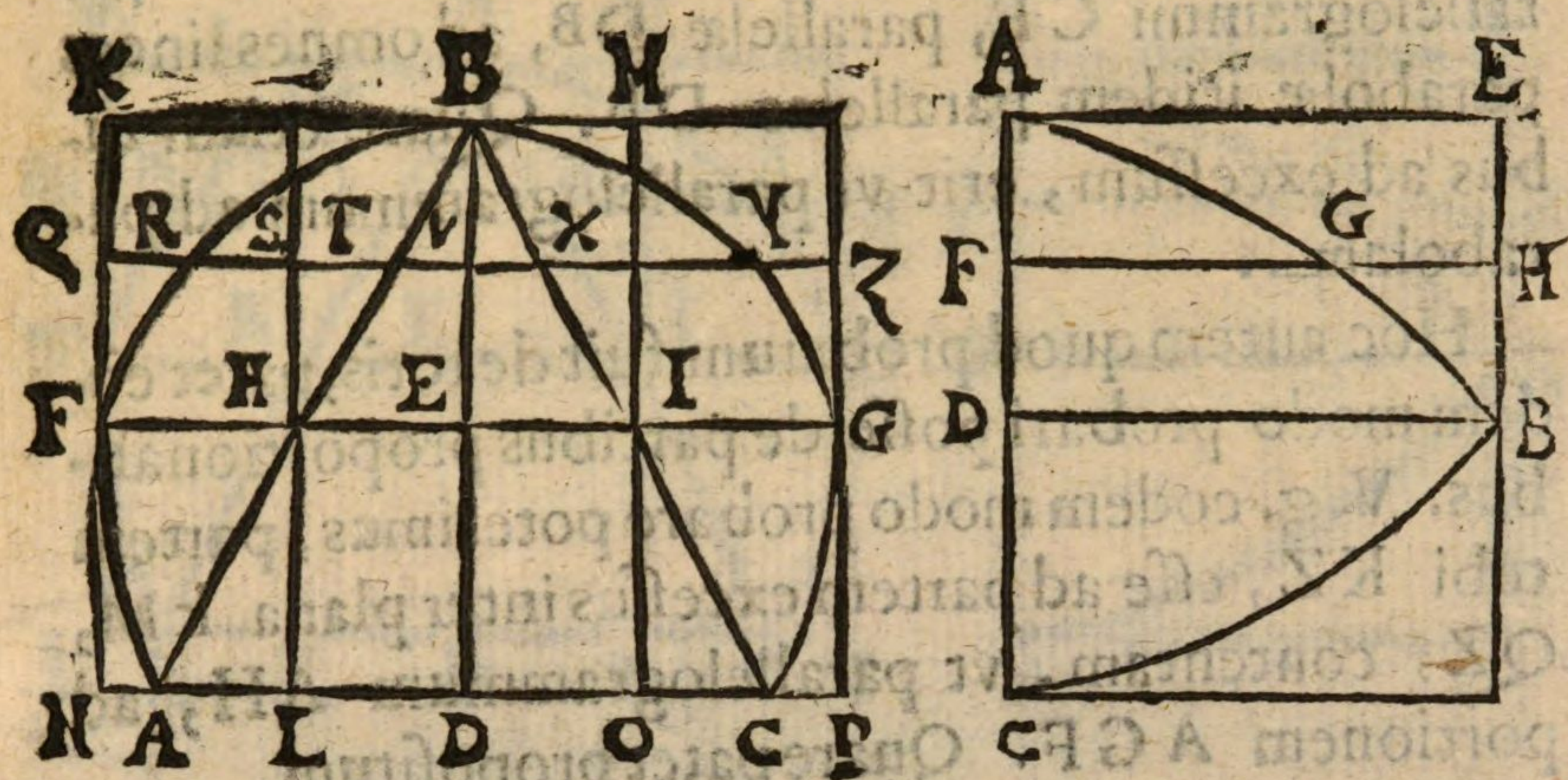
Si in qualibet sphaeræ, portione inscribatur conus, quæ portio cum cono secetur plano basi parallelo secante axim bifariam, & intelligatur tubus cylindricus circa eundem

axim

axim cum portione, cuius basis sit armilla excessus circuli facti in portione, supra circulum factum in cono à plano secante. Hic erit ad excessum portionis supra conum tam secundum totum, quam secundum partes proportionales, ut parallelogrammum circumscriptum parabole quadraticæ ad ipsam; dummodo hæc secetur secundum diametro parallelas.

Sit ABC , quælibet portio sphaeræ, in qua intelligatur inscriptus conus ABC , sectoque axi BD , bifariam in E , ducatur per E , planum FEG , plano ADC , parallelum, faciens in cono circulum HEI ; intelligamus tubum cylindricum $kLMP$, circa eundem axim BD , cuius basis armilla NLP , æqualis armillæ FHG : pariter in secunda figura intelligamus parabolam quadraticam ABC , cuius axis BD , basis vero AC , sit æqualis axi BD , portionis, & ei sit circumscriptum parallelogrammum. Dico tubum cylindricum $kLMC$, esse ad excessum portionis ABC , supra conum ABC , ut parallelogrammum EC , ad parabolam ABC . Sumatur in BD , axi portionis arbitrariè punctum V , per quod traiciatur planum QZ , plano AC , parallelum secans omnia solida ut in schemate; & pariter in parabola facta AF , æquali BV , per F , ducatur FGH , parallela DB . Quoniam enim rectangulum DEB , est ad rectangulum DVB , ut rectangulum AHB , ad rectangulum ATB , quia proportionibus horum rectangulorum componuntur ex iisdem

dem



dem proportionibus; & rectangulis in circulo AHB , ATB , sunt æqualia rectangula FHG , RTY ; ergo ut rectangulum DEB , ad rectangulum DVB ; sic rectangulum FHG , seu QZ , ad rectangulum RTY . Sed ut rectangulum QSZ , ad rectangulum RTY , sic armilla circularis QSZ , ad armillam circulare RTY . Ergo ut armilla ad armillam, sic rectangulum DEB , ad rectangulum DVB . Sed ut rectangulum DEB , in portione ad rectangulum DVB , sic rectangulum CDA , in parabola ad rectangulum CFA ; & ut rectangulum CDA , ad rectangulum CFA , sic DB , seu FH , ad FG , ex schol. proposit. 22. lib. prim. Ergo ut armilla circularis QSZ , ad armillam circulare RTY , sic HF , ad FG . Cum vero puncta V , F , sumpta sint arbitrariè; ergo concludemus omnes armillas circulares tubi parallelas armillæ NLP , esse ad omnes armillas circulares excessus portionis supra conum,

X paral-

parallelas eidem armillæ NLP , vt omnes lineæ parallelogrammi CE , parallelæ DB , ad omnes lineas parabolæ itidem parallelas DB . Quare etiam tubus ad excessum, erit vt parallelogrammum ad parabolam.

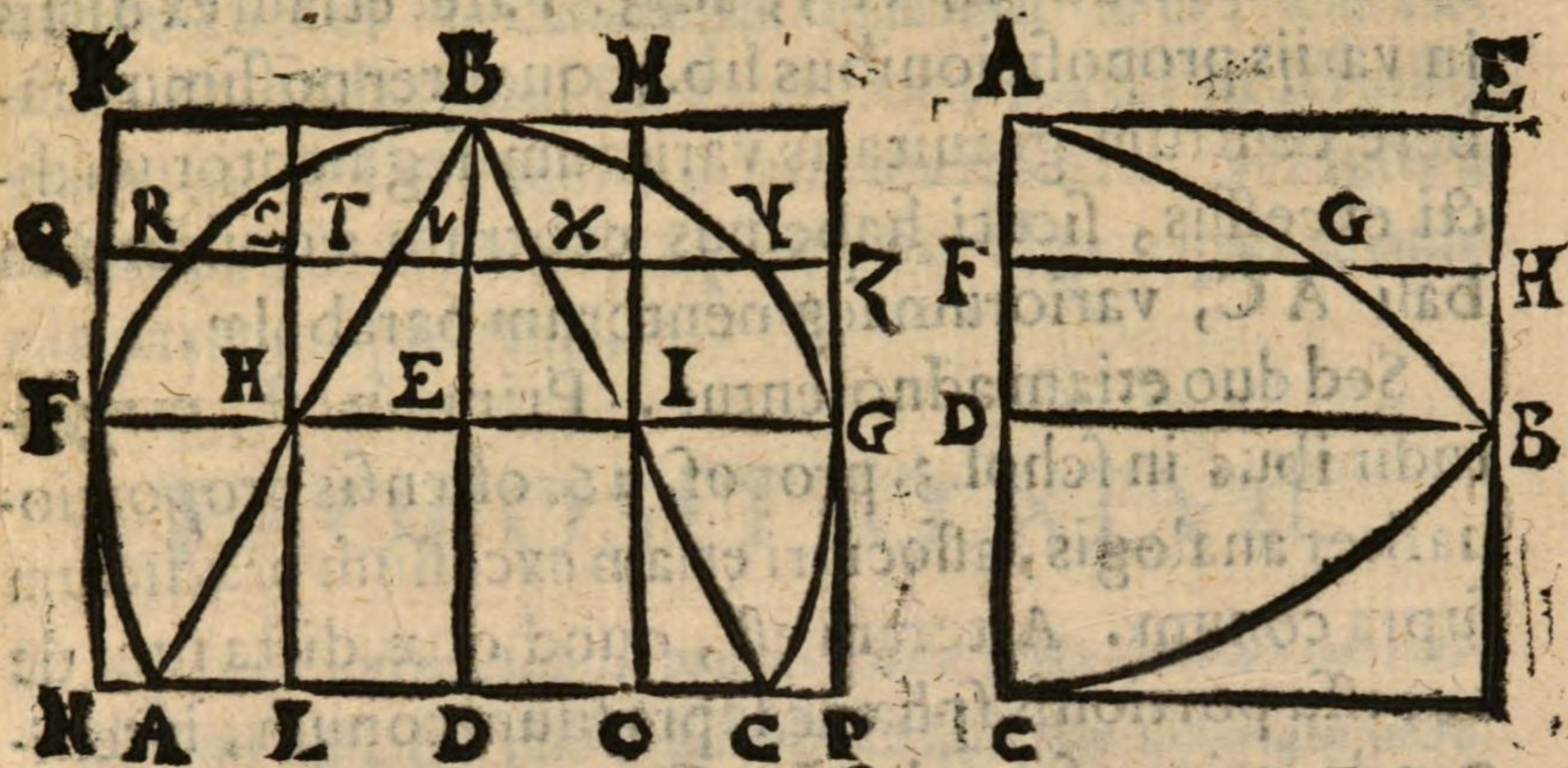
Hoc autem quod probatum fuit de totis, patet eodem modo probari posse de partibus proportionalibus. V.g. eodem modo probare poterimus, partem tubi KZ , esse ad partem excessus inter plana kM , QZ , contentam, vt parallelogrammum AH , ad portionem AGF . Quare patet propositum.

SCHOLIUM I.

Cum ergo ex schol. prim. proposit. i. lib. prim. sit parallelogrammum EC , sesquialterum parabolæ, etiam tubus erit sesquialter prædicti excessus. Imò ex propositionibus varijs eiusdem lib. prim. habebimus varias rationes partium tubi contentarum inter plana plano AC , parallela. Quæ autem hæ sint relinquimus lectori considerare ex illis propositionibus, in quibus assignantur rationes variarum partium parallelogrammi CE , ad varia segmenta parabolæ.

SCHOLIUM II.

Ad modum ergo persæpe rememoratorum, possumus deducere, excessum portionis ABC , supra
suum



suum conum, & parabolam esse quantitates propor-
 tionaliter analogas tam in magnitudine, quam in
 grauitate, tam secundum totum, quam secundum
 partes proportionales. Vnde quantum ad magnitu-
 dinem, patet illum excessum secari à plano FG , bi-
 fariam, sicuti etiam parabola secatur bifariam à dia-
 metro, sed sic bifariam, vt partes supra, & infra pla-
 num FG , sint semper similes, & æquales tam se-
 cundum totum, quam secundum partes proportio-
 nales. Quantum vero ad grauitatem, patet in pri-
 mis centrum grauitatis prædicti excessus esse in me-
 dio BD , sicuti in medio AC , basis parabolæ, est
 centrum æquilibrij parabolæ. Insuper patet, dimi-
 dij excessus superioris centrum grauitatis sic secare
 BE , vt pars ad B , sit ad partem ad E , vt 5, ad 3;
 quod habetur ex schol. 2. proposit. 2. lib. 3. In eadem
 ratione secatur DE , à centro grauitatis partis infe-
 rioris, adeo vt pars ad D , terminata, sit ad partem

terminatam ad E, vt 5, ad 3. Patet etiam ex dictis in varijs propositionibus lib. 3. qualiter possimus habere centrum grauitatis variorum segmentorum dicti excessus, sicuti habemus centrum æquilibrij in basi AC, variorum segmentorum parabolæ.

Sed duo etiam adnotentur. Primum est, magnitudinibus in schol. 3. propos. 26. ostensis proportionaliter analogis, associari etiam excessum prædictum supra conum. Alterum est, quod quæ dicta sunt de excessu portionis sphæræ supra suum conum, intelligenda etiam sunt de excessu portionis sphæroidis supra suum conum. Quia in lib. 4. de infinit. parabolis, probata est perpetua analogia reperta inter proportionales partes sphæræ, & sphæroidis.

PROPOSITIO XLVI.

Si in quolibet conoide hyperbolico, & parabolico quadratrico; item in qualibet sphæra, vel sphæroidis portione inscribatur conus. Centrum grauitatis excessus prædictorum solidorum supra suos conos erit in medio puncto diametri ipsorum.

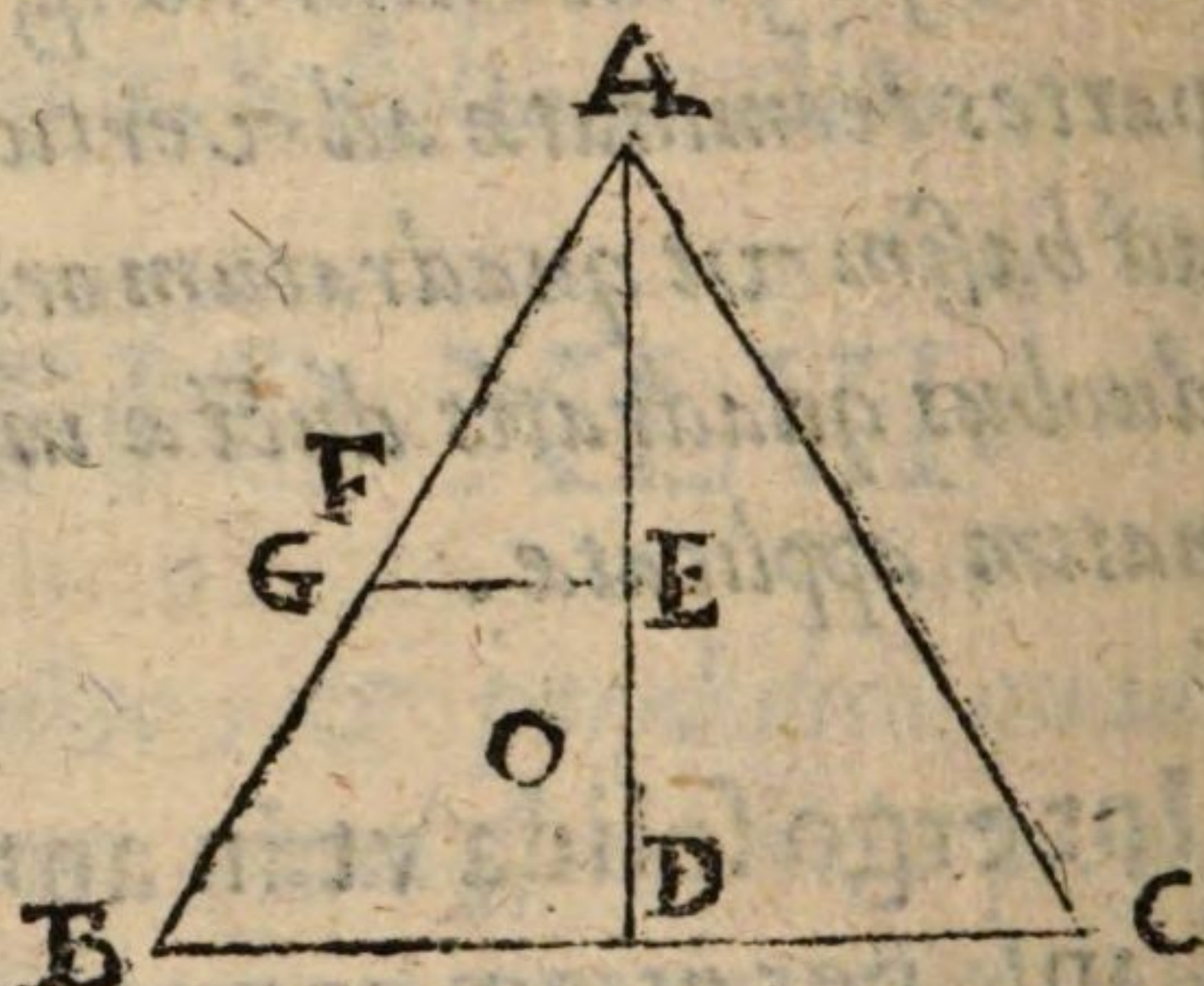
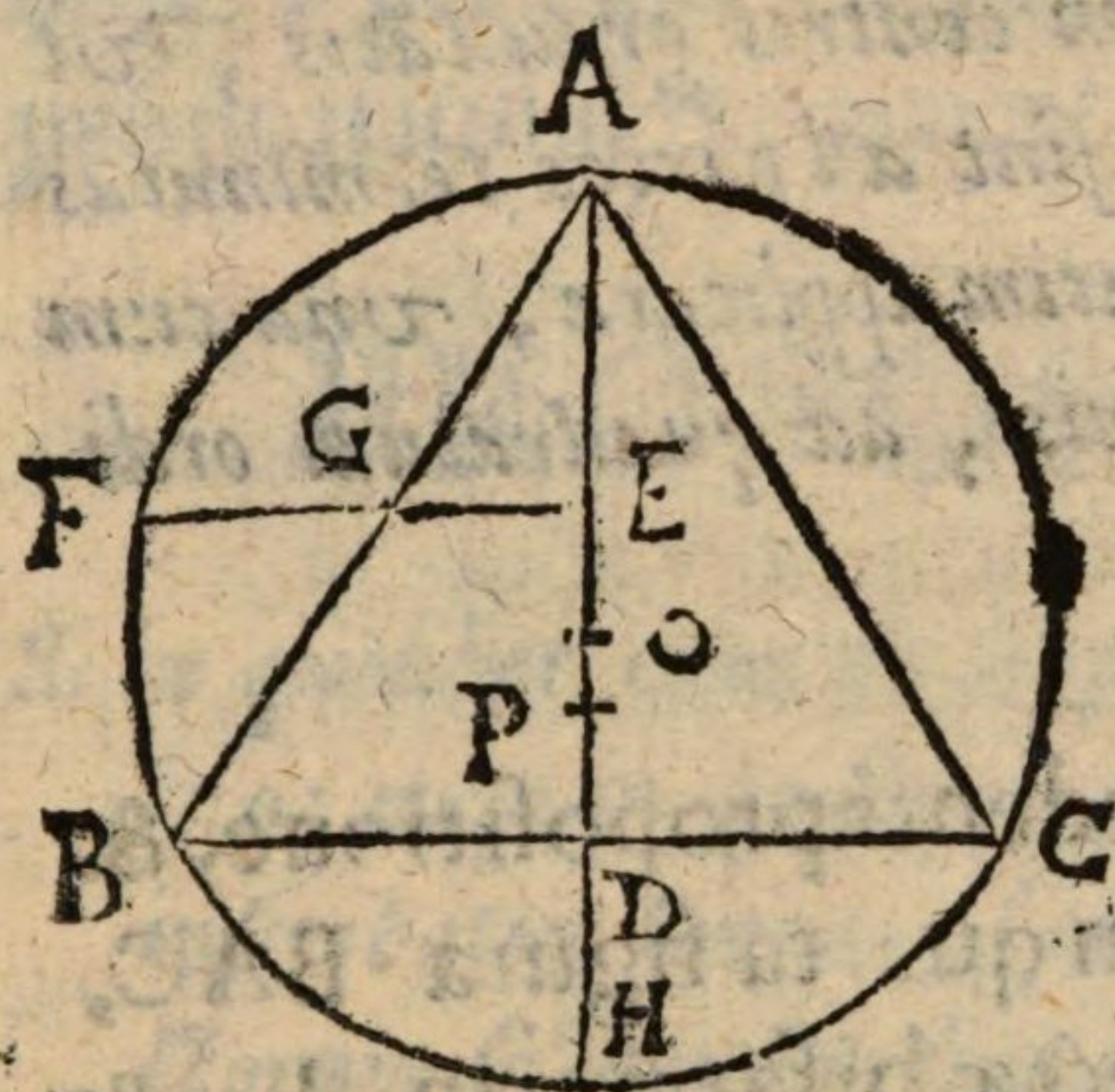
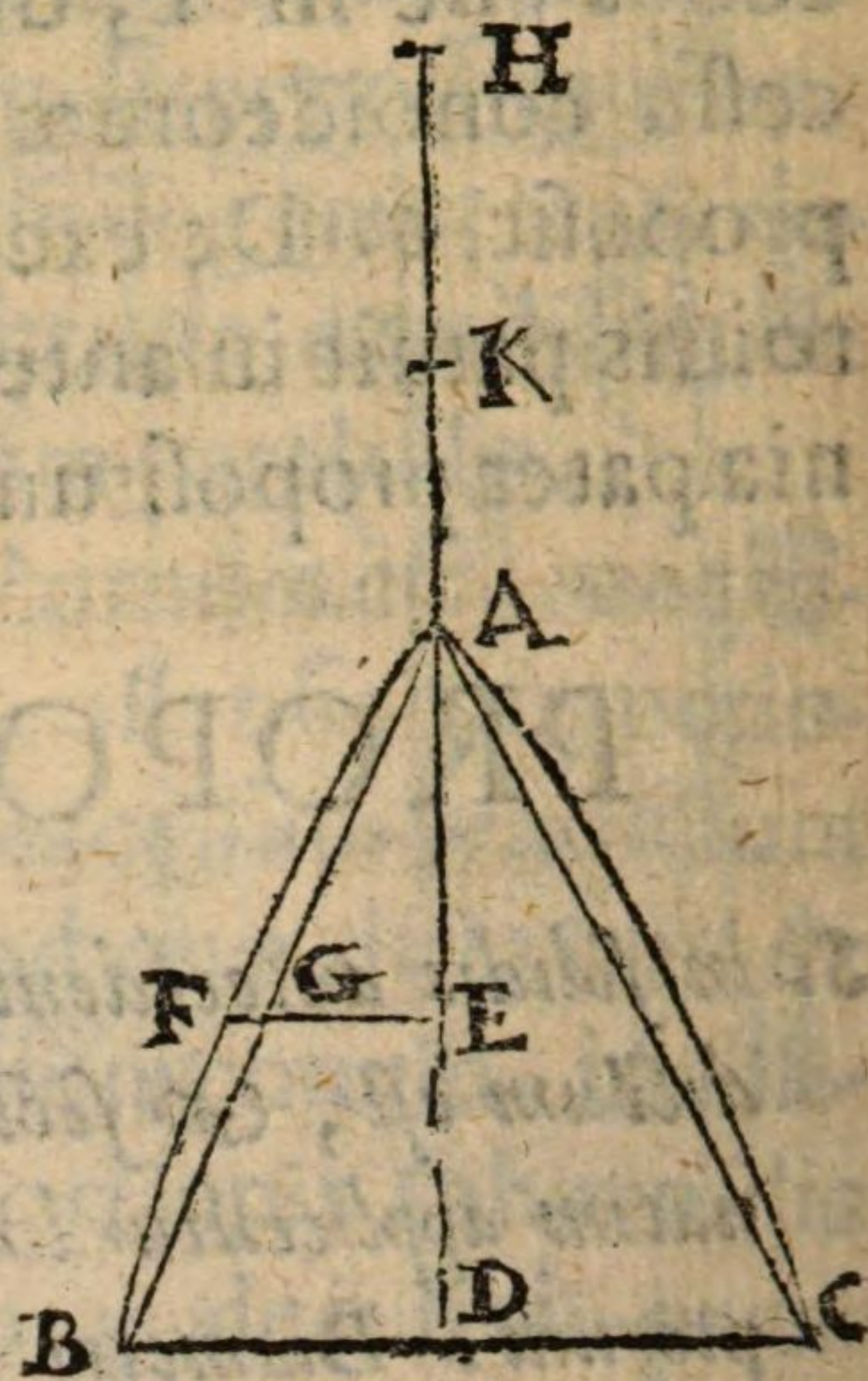
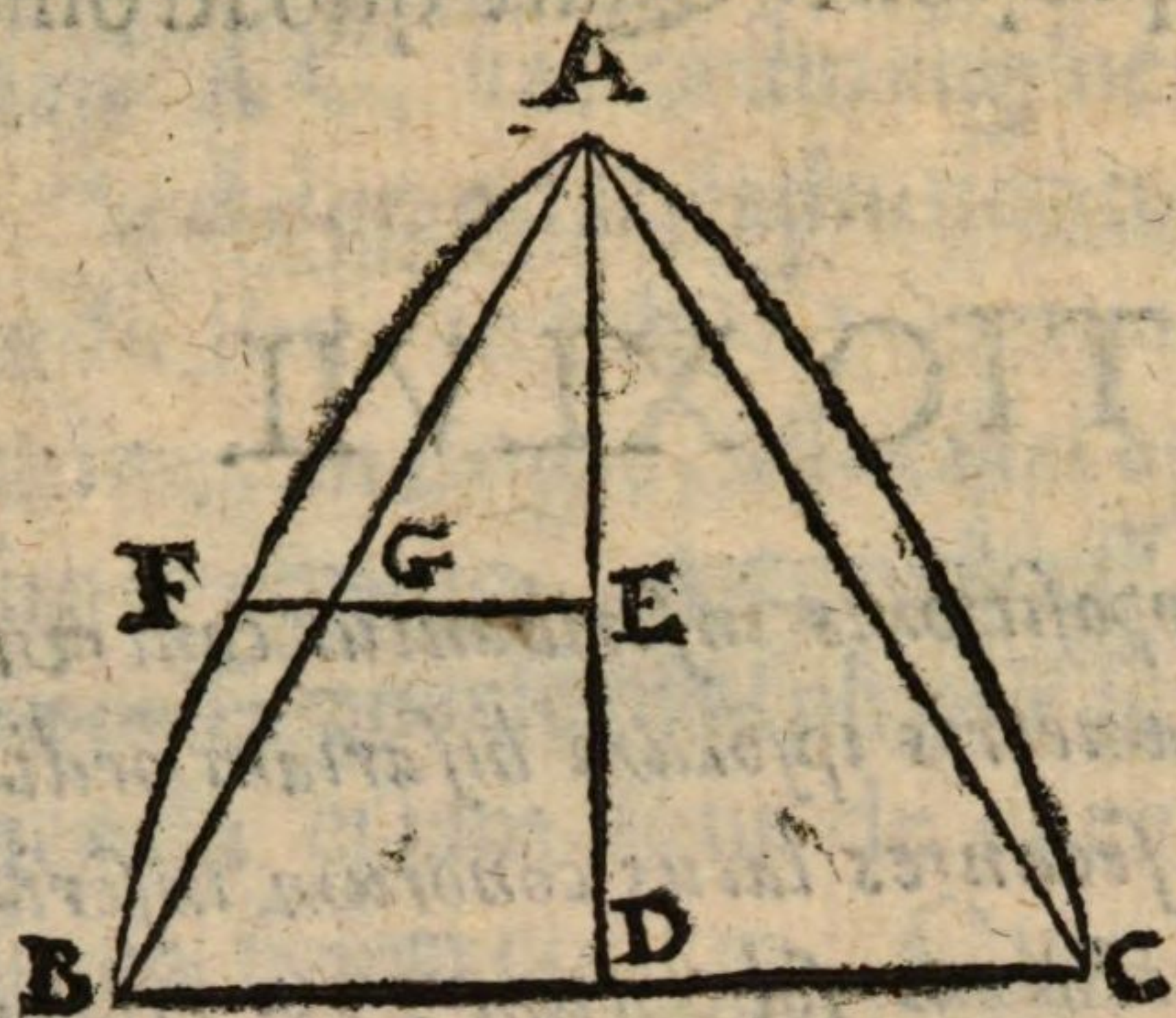
SIt conoides parabolicum quadraticum, vt in prima figura in schem. sequent. BAC, vel hyperbolicum vt in secunda; vel quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis vt in tertia, & in istis solidis intelligantur inscripti coni BAC. Dico centrum grauitatis excessuum prædictorum solidorum supra
conos

conos esse in E , diuidente bifariam AD . De excessu conoideorum supra conos, patuit in scholio proposit. 6. De excessu portionis sphaerae, vel sphaeroidis patuit in anteced. proposit. Quare quoad omnia patet propositum.

PROPOSITIO XLVII.

Si in solidis antecedentis propositionis inscribantur coni ut dictum est, & sectis diametris ipsorum bifariam ordinatim applicentur lineae, secantes latus conorum inscriptorum. Diametri praedictorum solidorum, & etiam coni, sic secabuntur ab ipsorum centrīs grauitatis, ut partes terminatae ad verticem sint ad partes terminatas ad basim ut quadratum ordinatim applicatae, una cum duobus quadratis ductae in conis, ad quadratum ordinatim applicatae.

Sint ergo solida ut in antecedenti propositione, & insuper etiam conus, ut in quarta figura BAC , quorum diametri AD , sint sectae bifariam in E , & ordinatim applicentur EGF , sitque horum centrum grauitatis punctum O . Dico AO , esse ad OD , ut quadratum FE , cum duobus quadratis GE , ad quadratum FE . In cono res est manifesta, quia sicut AO , est tripla OD , sic tria quadrata GE , sunt tripla unius quadrati GE . In alijs sic patebit. Fiat DP , quarta pars DA . Ergo P , erit centrum grauitatis conorum. Cum ergo ex proposit.



posit. anteced. sit etiam E , centrum grauitatis excessus solidorum supra conos, & ex supposito, sit O , centrum grauitatis solidorum; ergo erit reciproce ut PO , ad OE , sic excessus solidorum supra conos ad ipsos conos. Et componendo, ut PE ,
ad

ad OE , sic solida ad ipsos conos. Sed ex proposit.
 3. lib. nostri sexaginta problematum geometrico-
 rum, solida sunt ad conos vt quadrata FE , EG , ad
 duplum quadratum EG . Ergo & PE , erit ad EO ,
 vt quadrata FE , EG , ad duplum quadratum EG .
 Et antecedentium dupla. Ergo vt DE , ad EO ,
 sic duo quadrata FE , cum duobus quadratis EG ,
 ad duo quadrata EG . Ergo & per conuersionem
 rationis vt ED , ad DO , sic duo quadrata FE ,
 cum duobus quadratis EG , ad duo quadrata FE ;
 nempe sic dimidium ad dimidium, scilicet sic qua-
 drata FE , EG , ad quadratum FE . Et vt antece-
 dentium dupla. Ergo vt AD , ad DO , sic duo
 quadrata FE , cum duobus quadratis GE , ad qua-
 dratum FE . Et diuidendo vt AO , ad OD , sic
 quadratum FE , cum duobus quadratis GE , ad
 quadratum FE . Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Cum ergo in progressu demonstrationis proba-
 tum sit, esse DF , ad EO , vt duo quadrata FE ,
 cum duobus quadratis GE , ad duo quadrata GE ;
 nempe vt quadrata FE , EG , ad quadratum EG ;
 ergo etiam diuidendo, erit DO , ad OE , vt qua-
 dratum FE , ad quadratum GE . Quod etiam pa-
 tet verificari in cono. Sed ex hac propositione, &
 ex analogia, quæ reperitur inter parabolam qua-
 draticam, & sphæram, potest colligi quædam pro-
 positio

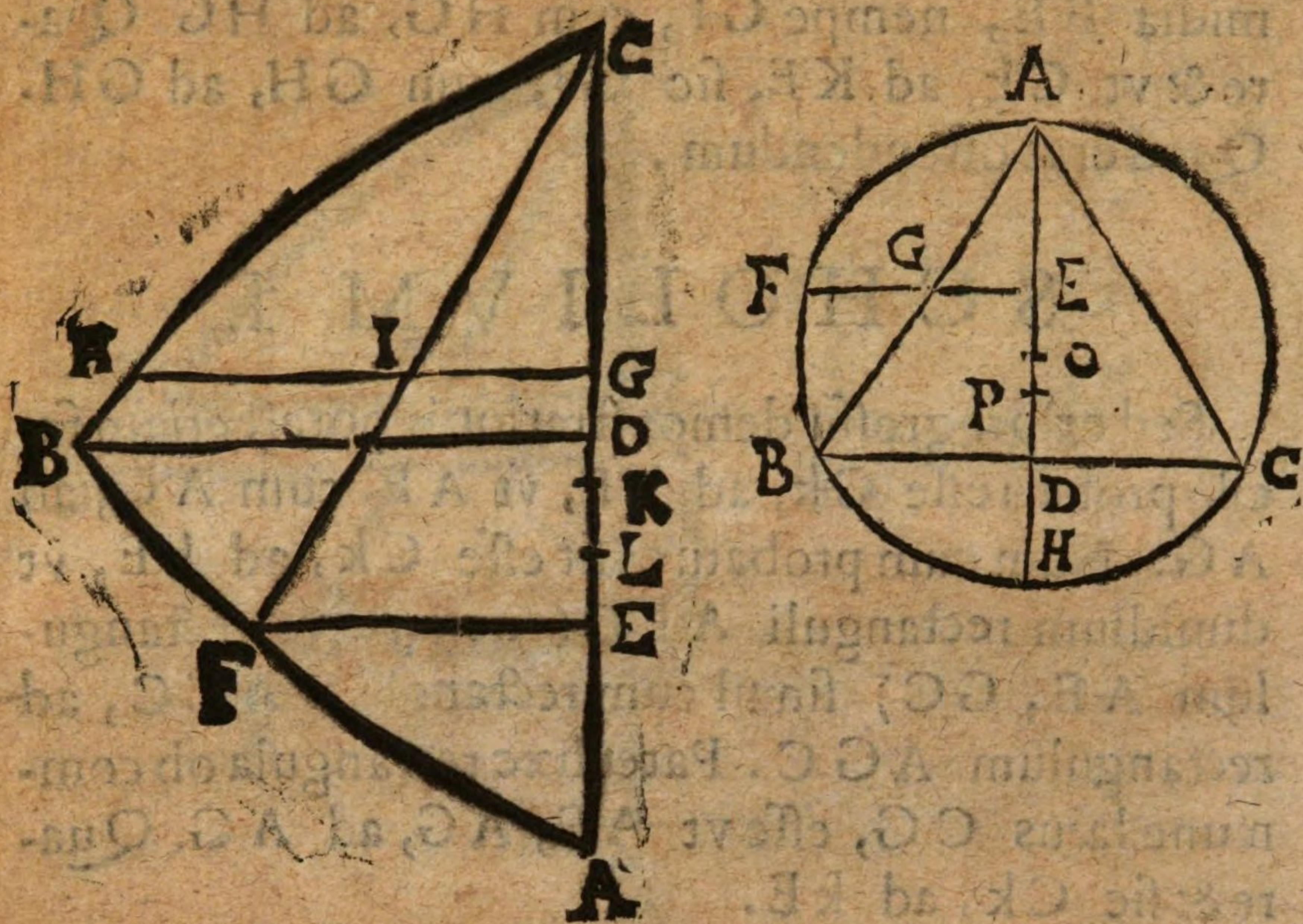
positio vniuersalis in qualibet portione parabola
quadraticæ.

PROPOSITIO XLVIII.

Si in quacunque portione parabola quadratica resecta linea diametro parallela inscribatur triangulum, & basis portionis parabola secetur bifariam, & per punctum bisectionis ducatur parallela diametro. Centrum æquilibrij secundum basim prædictæ portionis sic secabit basim, ut pars ad curuam terminata sit ad reliquam, ut parallela diametro ducta à puncto bisectionis, una cum intercepta inter punctum bisectionis, & latus trianguli, ad prædictam parallelam diametro.

ESto parabola ABC , quadratica, cuius basis AC , diameter BD , & sit quælibet eius portio EBC , resecta FE , diametro BD , parallela, & in portione sit inscriptum triangulum CFE ; sitque CE , secta bifariam in G , & per G , ducatur GH , parallela diametro, sique K , centrum æquilibrij in basi portionis EBC . Dico CK , esse ad KE , ut HG , cum GI , ad HI . In tertia figura schematis anteced. propos. intelligatur portio sphæræ, vel sphæroidis BAC , proportionalis EBC , portioni parabola, & intelligantur in ea omnia, quæ supra. Ergo CK , erit ad KE , in portione parabola, ut AO , ad OD , in portione sphæræ; nempe ex propos. anteced. ut duplum quadratum GE ,

cum



cum quadrato FE, ad quadratum FE. Sed cum GE, sit dimidia BD, eius quadratum erit quarta pars quadrati BD; & duo quadrata GE, erunt dimidium quadrati BD. Ergo AO, ad OD, & Ck, ad kE, in portione parabolæ, erunt vt quadratum FE, cum dimidio quadrati BD, ad quadratum FE; nempe vt dimidium rectanguli HDA, cum rectangulo HEA, ad rectangulum HEA. Sed vt illa plana ad inuicem in portione sphæræ, sic in portione parabolæ quadraticæ dimidium rectanguli AEC, cum rectangulo AGC, ad rectangulum AGC. Ergo & vt Ck, ad kE, sic dimidium rectanguli AEC, cum rectangulo AGC, ad rectan-
 Y gulum

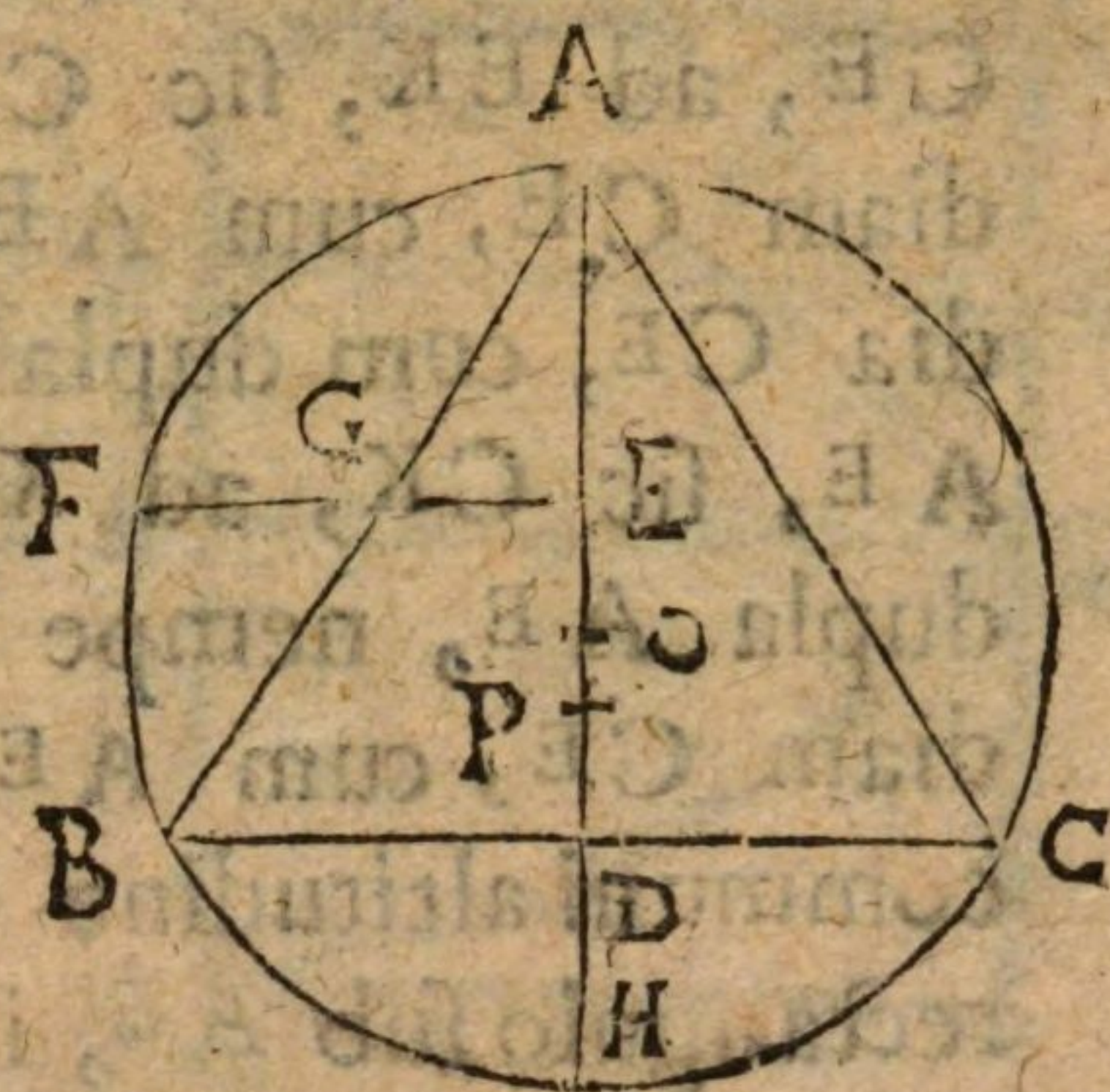
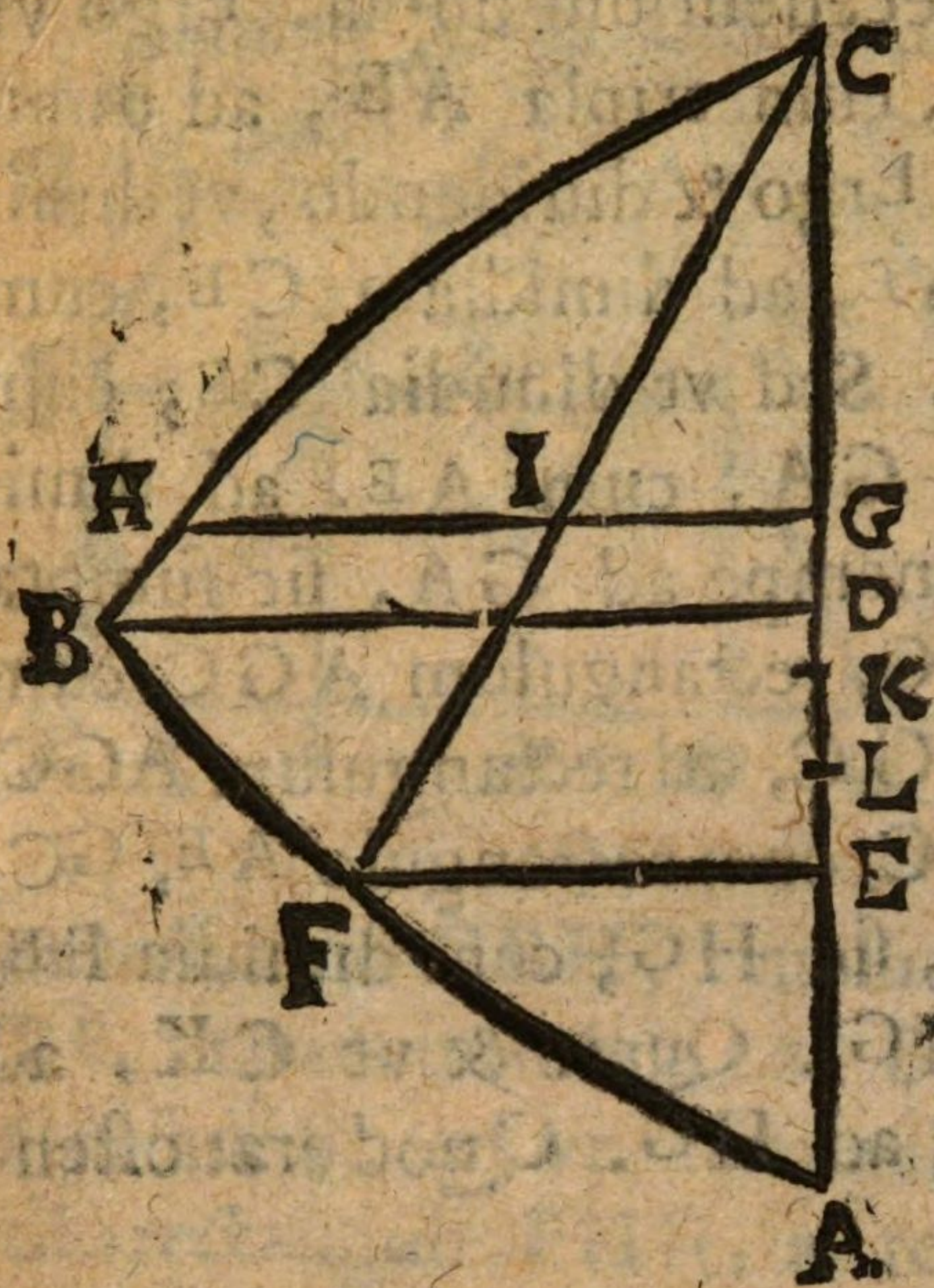
gulum AGC . Sed ut hæc plana ad inuicem sic dimidia FE , nempe GI , cum HG , ad HG . Quare & ut Ck , ad KE , sic GI , cum GH , ad GH . Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM I.

Sed ex progressu demonstrationis potest etiam facile probari esse Ck , ad kE , ut AE , cum AG , ad AG . Nam cum probatum sit esse Ck , ad kE , ut dimidium rectanguli AEC (nempe ut rectangulum AE, GC) simul cum rectangulo AGC , ad rectangulum AGC . Patet hæc rectangula ob commune latus CG , esse ut AE, AG , ad AG . Quare & sic Ck , ad kE .

Eliciet ergo lector facile, esse Ek , ad kG , ut HG , ad dimidiam GI ; vel ut GA , ad dimidiam AE . Ex quibus etiam patebit in portione BAC , sphaerae, vel sphaeroidis esse AO , ad OD , ut DH , HE , ad HE . Et DO , esse ad OE , ut EH , ad dimidiam HD .

Sed hæc, quæ probata fuerunt ex analogia reperta inter portiones parabolæ, & sphaerae, possunt absolute probari ex proprijs ipsius parabolæ. Nam cum ABC , sit verè parabola ex prim. conic. proposit. 47. cuius diameter HI , erit in G , centrum æquilibrij parabolæ ABC , appensæ secundum CE . Fiat CL , dupla LE . Ergo L , erit centrum æquilibrij trianguli $EF C$, appensi secundum, CE . Er-

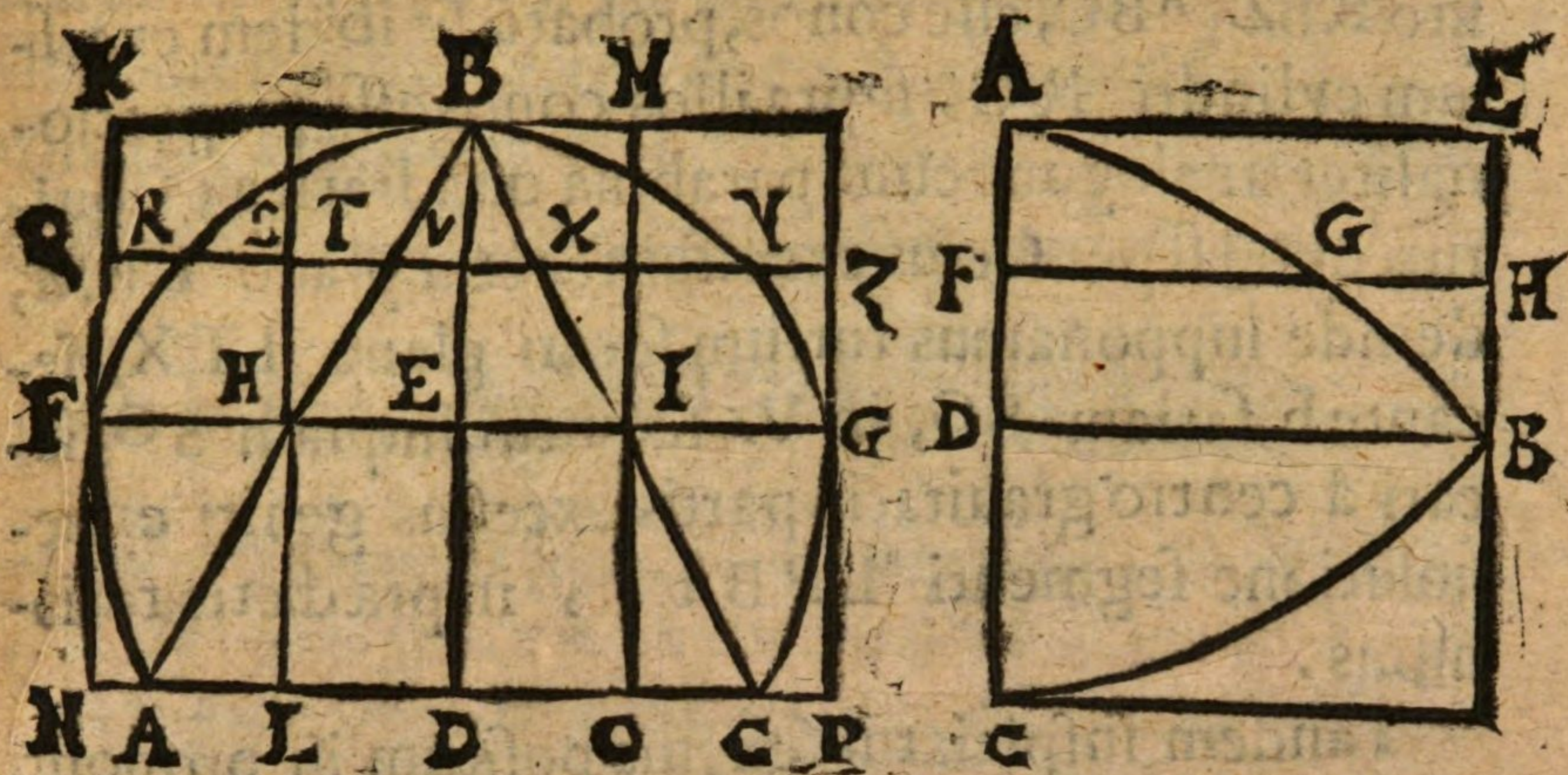


go erit reciprocè vt Lk , ad kG , sic $FB C$, ad tri-
 angulum FCE . Et componendo, crit LG , ad
 Gk , vt portio $EFBC$, ad triangulum $EF C$. Sed
 cum ex schol. proposit. 17. lib. prim. sit conuerten-
 do, portio ad parallelogrammum duplum trianguli,
 vt dimidia AE , vna cum sexta parte CE , ad AE ;
 & ad ipsum triangulum, vt idem antecedens ad di-
 midiam AE . Ergo erit etiam, vt LG , ad GK ,
 sic dimidia AE , cum sexta parte CE , ad dimidiam
 AE . Ergo & vt antecedentium tripla. Ergo vt
 EG , tripla LG , ad Gk , sic sesquialtera AE ,
 cum dimidia CE , ad dimidiam AE . Et per con-
 uersionem rationis, vt GE , ad EK , sic sesquialte-

ra AE ; cum dimidia CE , ad dimidiam CE , cum AE . Et rursum ut antecedentium dupla. Ergo ut CE , ad EK , sic CE , cum tripla AE , ad dimidiam CE , cum AE . Ergo & diuidendo, ut dimidia CE , cum dupla AE , ad dimidiam CE , cum AE , sic CK , ad KE . Sed ut dimidia CE , cum dupla AE , nempe ut GA , cum AE , ad dimidiam CE , cum AE , nempe ad GA , sic sumpta communi altitudine CG , rectangulum AGC , cum rectangulo sub AE , in GC , ad rectangulum AGC : Et ut rectangulum AGC , cum rectangulo AE , GC , ad rectangulum AGC , sic HG , cum dimidia FE , nempe cum IG , ad HG . Quare & ut CK , ad KE , sic HG , cum GI , ad HG . Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM II.

Sed cum in schol. 2. prop. 45. probatum sit parabolam quadraticam, sphaeram, & sphaeroides esse quantitates proportionaliter analogas cum tribus alijs solidis, sequitur etiam in illis currere supra explicatum compendium circa illorum centra grauitatis. Quoniam ergo excessus, in schemate sequenti, portionis ABC , sphaerae, vel sphaeroidis supra conum ABC , est proportionaliter analogus cum parabola quadratica ABC ; sequitur inquam, quod si prius secetur plano FEG , deinde plano RVY , secante BE , bifariam in V , quod centrum grauitatis partis
ex.



excessus ex FBH, reuoluta circa BE, sic secabit BE, ut pars terminata ad B, sit ad partem terminatam ad E, vel ut rectangulum RTY, cum dimidio rectanguli FHG, ad rectangulum RTY: vel ut rectangulum ATB, cum dimidio rectanguli AHB, ad rectangulum ATB: vel ut rectangulum DV B, cum dimidio rectanguli DEB, ad rectangulum DV B: vel compendiosius, ut ED, DV, ad DV: seu, quod idem est, ut AH, AT, ad AG. Pariter sequitur, quod EV, sic secabitur à prædicto centro, ut pars terminata ad E, sit ad partem terminatam ad V, ut VD, ad dimidiam VE: seu ut TA, ad dimidiam AH: seu ut rectangulum BVD, ad dimidium rectanguli BED: seu ut rectangulum BTA, ad dimidium rectanguli BHA: seu tandem ut rectangulum RTY, ad dimidium rectanguli FHG.

Item cum in schem. posito in schol. prop. 40. supposito

fito RBZ , ABC , esse conos, probatū sit ibidem excessum cylindri RC , supra illos conos esse proportionaliter analogum cum parabola quadratica; sequitur, quod si prædictus excessus secetur plano $LP M$, deinde supponamus rursum secari plano $IT X$, secante bifariam SG , in V : sequitur inquam SG , secari à centro gravitatis partis excessus geniti ex revolutione segmenti $LP B T R$, in prædictis rationibus.

Tandem inspiciatur schema positum in proposit. 26. in quo ex cit. schol. annulus latus ex hyperbola ABC , circa $K M$, probatus fuit proportionaliter analogus cum parabola quadratica $A O C$. Si ergo illæ annulus secetur prius vbilibet plano $N B V$, deinde plano $I S T$, secante bifariam $K L$, in puncto, in quo ipsam secat; eadem compendia supra exposita colligemus circa centrum gravitatis portionis annuli ex portione hyperbolæ $A B N$. Hæc enim omnia patent ex dictis, & lector memor supradictorum facile percipiet. Nè ergo ipsi tædium afferamus ad alia transeamus.

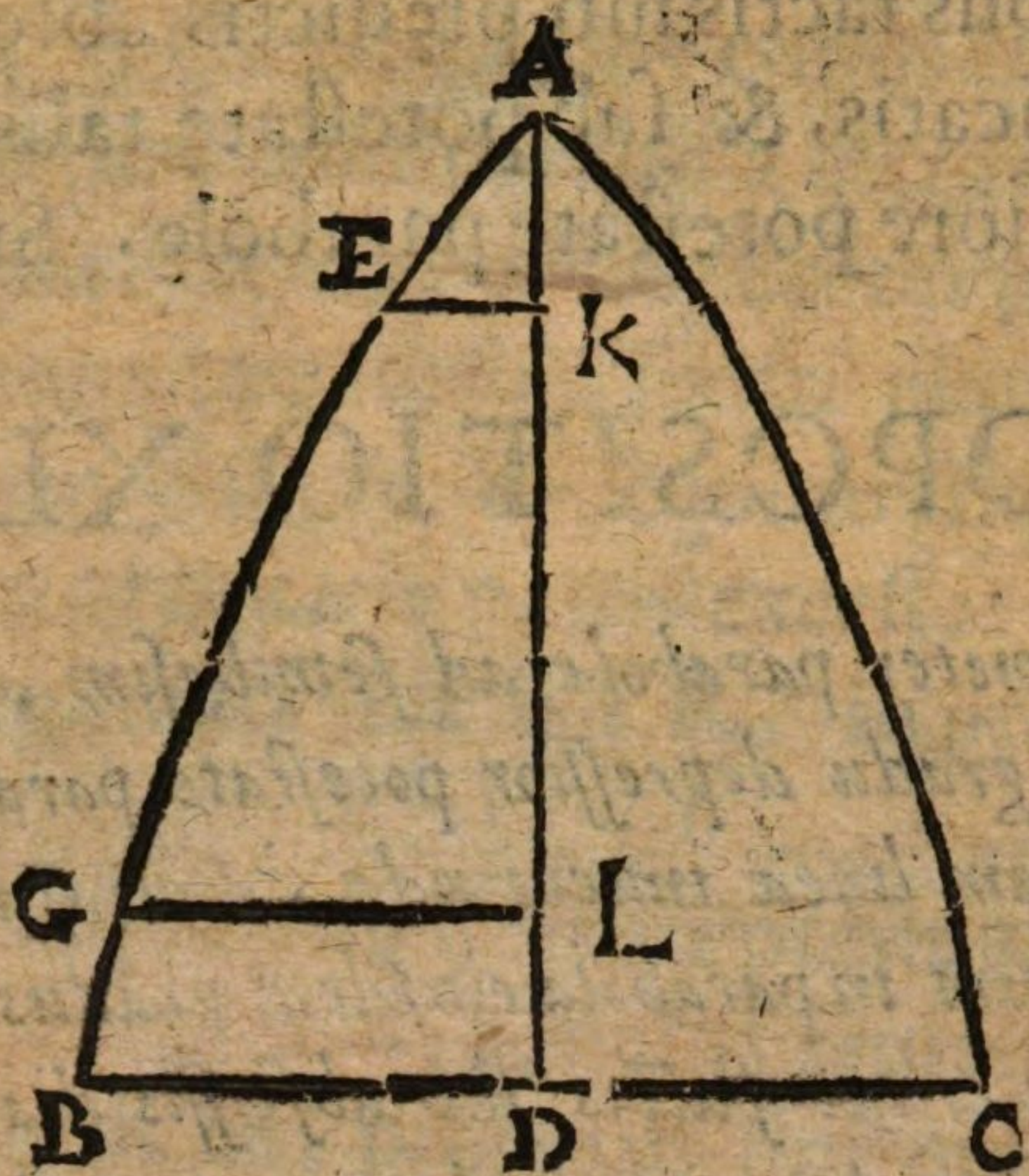
Parabola quadratica habet lineam quandam, quæ appellatur parameter, seu latus rectum; cuius natura est, ut quadrata ordinatum applicatarum, æqualia sint rectangulis contentis sub hac, & sub portionibus axis abscissis versus verticem ab ordinatum applicatis. Hanc proprietatem habent quoque aliæ infinitæ parabolæ, sed suo modo: adeo ut in quolibet sit assignabilis quædam linea, ut potestates ordinatum

natim applicatarum parabolæ congruentes, æquales
sint potestatibus factis sub prædictis abscissis ab or-
dinatim applicatis, & sub potestate talis lineæ vno
gradu depressoire potestate parabolæ. Sit ergo.

PROPOSITIO XLIX.

*Si fiat ut diameter parabolæ ad semibasim, sic huius po-
testas vno gradu depressoire potestate parabolæ ad simi-
lem potestatem lineæ inueniendæ. Potestates applicata-
rum ordinatim in parabola eiusdem gradus cum parabola,
æquales erunt factis sub abscissis diametri versus
verticem ab ordinatim applicatis, & sub potestate li-
neæ inuentæ, vno gradu depressoire potestate para-
bolæ.*

ESto quælibet parabola BAC , in qua fiat ut dia-
meter AD , ad semibasim DB , sic potestas
huius vno gradu depressoire potestate parabolæ, ad
similem potestatem AH : v.g. si parabola est qua-
dratica, sic DB , ad AH ; si est cubica, sic quadra-
tum DB , ad quadratum AH : si est quadriatoqua-
dratica, sic cubus DB , ad cubum AH : Dico, quod
si ordinatim applicentur GL , EK , potestas GL ,
eiusdem gradus cum parabola æqualis erit facto sub
 LA , & sub potestate AH , vno gradu depressoire
potestate parabolæ, & sic de cæteris. Quoniam e-
nim ut AD , ad DB , sic potestas DB , vno gradu
depressoire potestate parabolæ, ad similem potesta-
tem



rem AH ; ergo factum sub DA , & sub prædicta potestate AH , erit equale potestati BD , eiusdem gradus cum parabola. Cum autem sit ex genesi parabola, ut potestas BD , eiusdem gradus cum parabola ad similem potestatem GL , sic DA , ad AL . Et ut DA , ad AL , sic factum sub DA , & sub potestate AH , vno gradu depressoire potestate parabola, ad factum sub LA , & sub prædicta potestate AH . Ergo & ut factum sub DA , & sub tali potestate AH , ad factum sub LA , & sub potestate AH , sic potestas BD , eiusdem gradus cum parabola ad similem potestatem GL . Ergo & permutando, ut factum sub DA , & sub tali potestate AH , ad potestatem BD , eiusdem gradus cum parabola, sic factum sub LA , & sub potestate AH , ad potestatem

177

stātem GL , eiusdem gradus cum parabola. Cum autem factum sub DA , & sub potestate AH , ostensum fuerit equale potestati prædictæ BD . Ergo & factum sub LA , & sub potestate AH , erit equale potestati GL . Idem patebit de reliquis. Quare etiam patebit propositum.

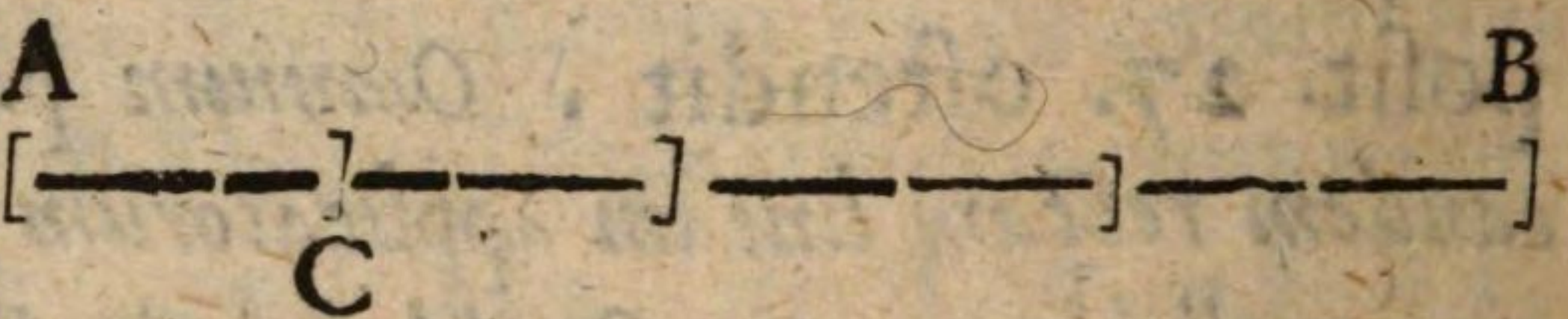
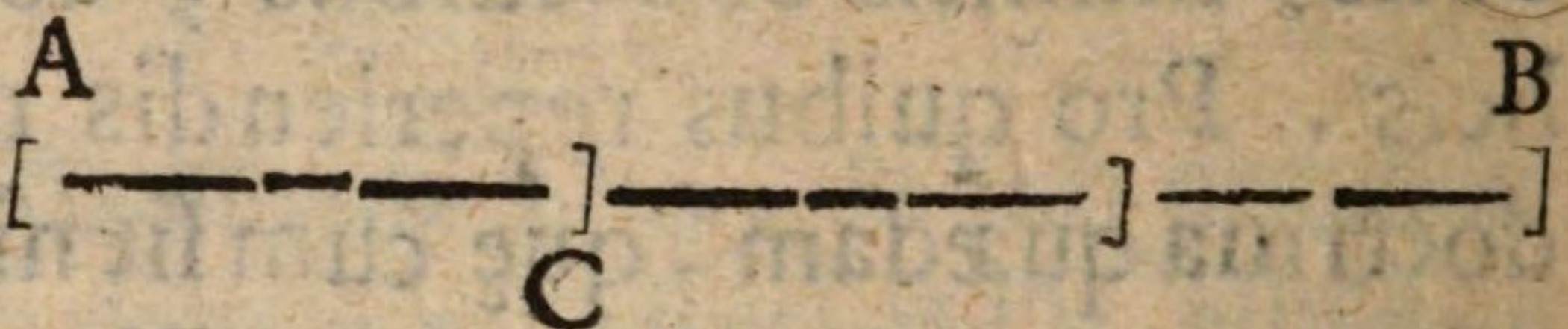
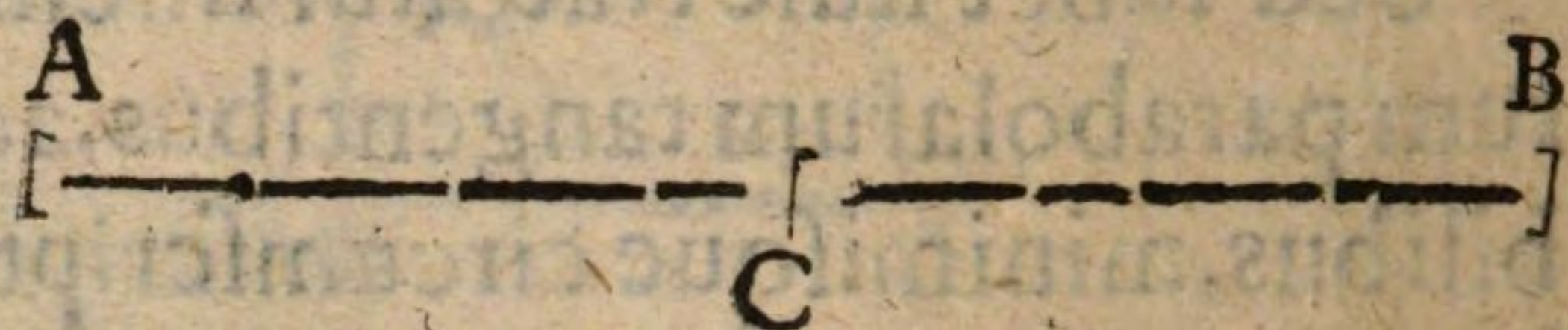
SCHOLIUM.

Sed lubet huic tractatui finem imponere infinitarum parabolarum tangentibus, ac maximis inscriptilibus, minimisque circumscriptilibus infinitis parabolis, infinitis conoidibus, ac semifusis parabolicis. Pro quibus reperendis nobis necessaria est doctrina quædam, quæ cum sit nimis prolixa, ex alijs est petenda. Euclides in 6. Elementorum libro, proposit. 27. ostendit. *Omniū parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei, quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.* Quod Euclides demonstravit in planis, Eutotius de sphæra, & cylind. proposit. 3. Bonaventura Cavalieri, in exercit. 6. proposit. 28. Ricardus Albius in suo hemisphæ. dissecto. proposit. 42. extenderunt suo modo ad solida, patefacientes. *Omniū parallelepipedorum ad eandem rectam lineam applicatorum cubisque deficientium, maximum esse, quod ad tertiam illius partem applicatur.* Hanc denique doctrinam Petrus Paulus Carauaggius Medio-

Z dio-

diolanensis eruditissimus geometra in sua geometria applicationum, ampliavit ad altiores potestates, ostendendo applicationem aliarum potestatum servare similem ordinem partium ad quas fit applicatio; adeo ut magnitudo ad quam fieri debet applicatio sit secunda in tot partes quota est magnitudo, quæ debet applicari, in ordine graduum; & applicatio sit facienda ad illarum unicam. V.g. si ad partem datæ AB , sit applicandum parallelogrammum deficient, &c. hoc est

si AB , sit sic secanda in C , ut rectangulum ACB , sit omnium maximum illorum, quæ possunt fieri ex partibus AB ; punctum C , sit illud quod bissecat AC .



Si vero sit applicandum parallelepipedum, hoc est si AB , taliter sit secanda in C , ut solidum factum sub AC , in quadratum CB , sit omnium maximum; AC , debet esse tertia pars AB . Si vero sit applicandum planoplanum, adeo ut factum sub AC , in cubum CB , sit omnium maximum. AC ; debet esse quarta pars AB . Et sic in infinitum in altioribus potestatibus. Hæc ergo doctrina nobis est necessaria pro imposteriorum dicendis. Quam etiam lector

etor debet supponere, vel in citat. opere Carauaggij inspicere.

PROPOSITIO L.

Si in qualibet infinitarum parabolarum sumatur aliquod punctum à quo ad diametrum recta linea ordinatim applicetur, diameterque ita producatut ut pars extra parabolam sit ad partem diametri abscissam ab ordinatim applicata versus verticem ut numerus parabola unitate minutus ad unitatem. Recta linea, quae ab extremitate inuenta lineae ducitur ad illud punctum, quod sumptum fuerat, parabolam continget.

ESto quaelibet semiparabola cuius vertex B, diameter BD, & in curua parabolica sumatur quodlibet punctum E, per quod ordinatim applicetur EH, producatutque HB, in G, ut GB, sit ad BH, ut numerus parabola unitate minutus ad unitatem: v. g. si parabola sit quadratica, fiat æqualis BG, ipsi BH: si sit cubica sit GB, dupla BH, & sic in infinitum (supponatur in præfenti parabolam esse cubicam) & iungatur GE. Dico hanc parabolam contingere. Si non, cadat intra; & intelligatur ordinatim applicata AKD. Quoniam AD, maior est DK, ergo quaelibet potestas AD, maior erit qualibet potestate KD, eiusdem gradus. Ergo quaelibet potestas AD, eiusdem gradus cum parabola ad potestatem EH, eiusdem gradus, habebit

maio rem rationem quam similis potestas KD , ad eandem potestatem EH . V. g. maior erit ratio cubi AD , ad cubum EH , quam cubi kD , ad eundem cubum EH . Sed ut potestas AD , ad potestatem EH , sic ex natura parabolæ, DB , ad BH ; & ut DB , ad BH , sic factum sub DB , & sub potestate BG , vno gradu inferiori potestate parabolæ, ad factum sub eadem potestate GB , & sub BH . Ergo maior erit ratio facti sub DB , & sub tali potestate BG , ad factum sub HB , & sub eadem potestate BG , ratione potestatis kD , eiusdem gradus cum parabola, ad similem potestatem EH . V. g. maior erit ratio facti sub DB , & sub quadrato BG , ad factum sub HB , & sub quadrato BG , ratione cubi KD , ad cubum EH . Sed ut potestas KD , ad similem potestatem EH , sic similis potestas DG , ad similem potestatem GH . Ergo & factum sub DB , & sub potestate BG , vno gradu depressiori potestate parabolæ, ad simile



simile factum sub HB , & sub eadem potestate BG , erit in maiori ratione quam potestas DG , eiusdem gradus cum parabola ad similem potestatem GH . Ergo & permutando primum factum ad potestatem DG , erit in maiori ratione quam secundum factum ad potestatem GH . V.g. factum sub DB , in quadratum BG , habebit ad cubum DG , maiorem rationem, quam factum sub HB , & sub quadrato BG , ad cubum HG . Quod implicat, quia factum sub DB , & sub potestate BG , est in minori ratione ad potestatem DG , & non in maiori. Quia ex doctrina scholij anteced. factum sub HB , & sub potestate BG , est omnium maximum homogeneorum sub partibus HG ; non sic factum sub DB , & sub potestate BG , est maximum homogeneorum sub partibus DG . V.g. factum sub HB , & sub quadrato BG , est maximum omnium parallelepipedorum applicabilium ad partem HG , non sic est maximum factum sub DB , & sub quadrato BG , applicabilium ad partem DG . Quare patet propositum.

SCHOLIUM.

Ex dictis facile eliciemus, quod si circa diametrum BD , & super eadem basi AD , intelligamus infinitas semiparabolas, & accepto in diametro BD , puncto H , ducatur $HCEFG$, parallela AD , secans omnes curvas parabolicas, & pariter intelligamus infinitas tangentes KE , LF , MG , &c. eliciemus inquam, triangula infinita CBH , EKH , FLH , GMH ,

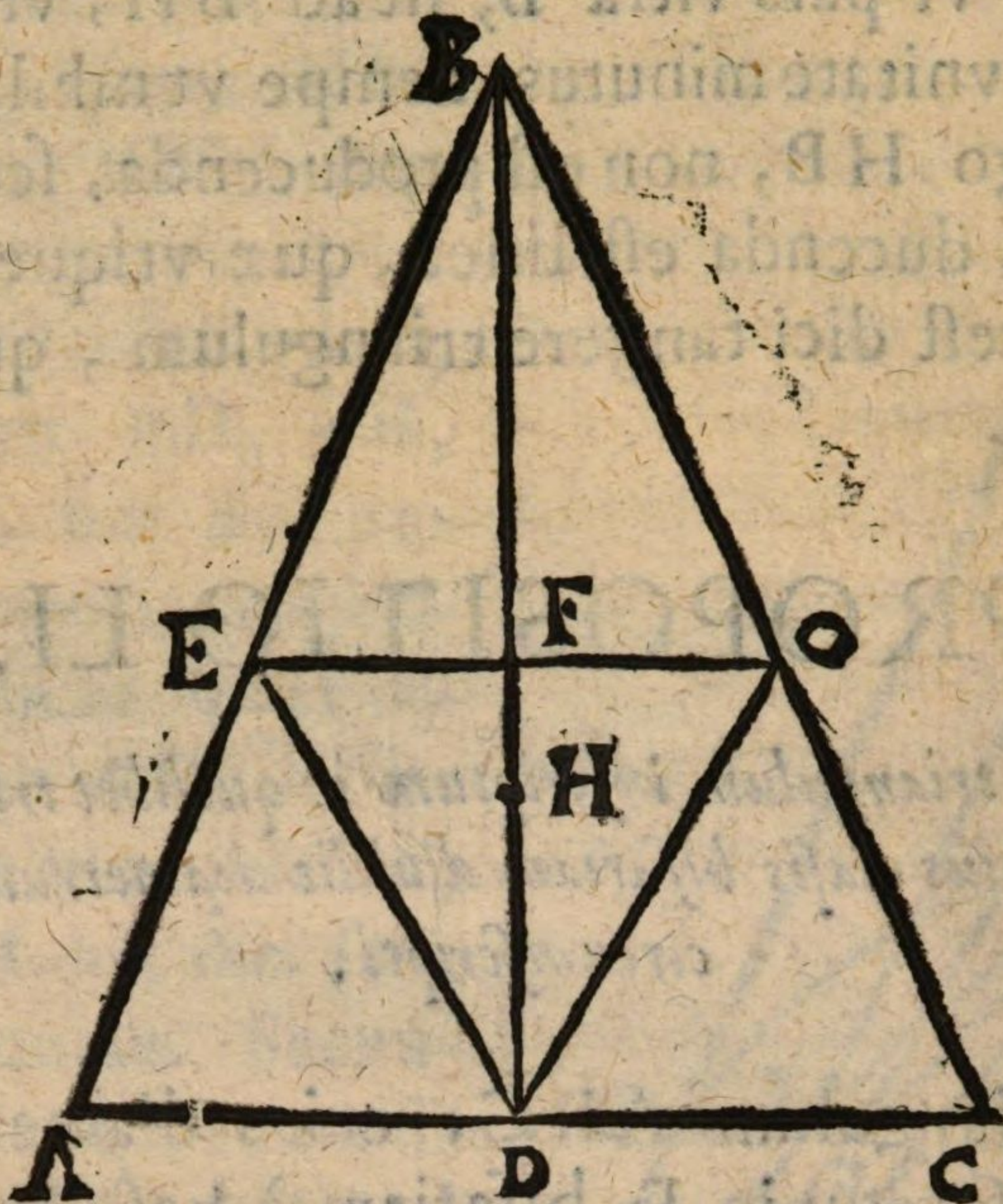
esse HB , ut pars ultra B , sit ad BH , ut numerus parabolæ unitate minutus, nempe ut nihil, ad unitatem. Ergo HB , non est producenda, sed à puncto B , ad C , ducenda est linea, quæ utique quodammodo potest dici tangere triangulum, quia ipsum non secat.

PROPOSITIO LI.

*Maximum triangulum inscriptum in quolibet triangulo, est
cuius basis bifariam dividit diametrum
circumscripti.*

ESto triangulum ABC , cuius diameter BD , quæ secetur in F , bifariam à base EO , trianguli EDO . Dico triangulum EDO , esse maximum omnium inscriptibilium in triangulo ABC . Quoniam enim triangulum ABC , ad triangulum EDO , habet rationem compositam ex ratione AC , ad EO (nempe ex ratione DB , ad BF) & ex ratione BD , ad DF ; & hæ duæ rationes componunt rationem quadrati BD , ad rectangulum bfd . Ergo triangulum ABC , erit ad EDO , ut quadratum DB , ad rectangulum bfd . Sed rectangulum bfd , est maximum omnium rectangulorum factibilium ex partibus BD , in puncto divisæ. Ergo etiam triangulum EDO , erit maximum omnium inscriptibilium intra ABC . Quod &c.

SCHO-



SCHOLIUM.

Notetur obiter centrum grauitatis amborum triangulorum ABC , EDO , esse idem punctum. Sit enim H , centrum grauitatis trianguli ABC . Ergo qualium BD , est 6, & DF , 3, BH , erit 4, DH , 2, & HF , 1. Ergo H , erit etiam centrum grauitatis trianguli EDO .

PROPOSITIO LI.

Maximus conus inscriptibilis in quolibet cono, est cuius diameter est tertia pars circumscripti.

Hæc

HÆc proposit. ostenditur etiam ab Albio in hemisphæ. diffec. proposit. 44. Sed supponamus ABC , EDO , esse conos, & DF , esse tertiam partem DB . Dico conum EDO , esse maximum omnium, &c. Nam, cum conus ABC , ad conum EDO , habeat rationem compositam ex ratione quadrati AD , ad quadratum EF (nempe quadrati DB , ad quadratum BF) & ex ratione DB , ad DF ; & cum hæ duæ rationes componant rationem cubi BD , ad factum sub quadrato BF , & sub FD ; ergo ABC , erit ad EDO , vt cubus BD , ad factum sub quadrato FB , & sub FD . Cum ergo hoc factum sit maximum omnium homogeneorum ipsi factorum ex partibus BD , in puncto diuisæ. Ergo etiam conus EDO , erit maximus omnium inscripibilem &c. Quod &c.

SCHOLIUM.

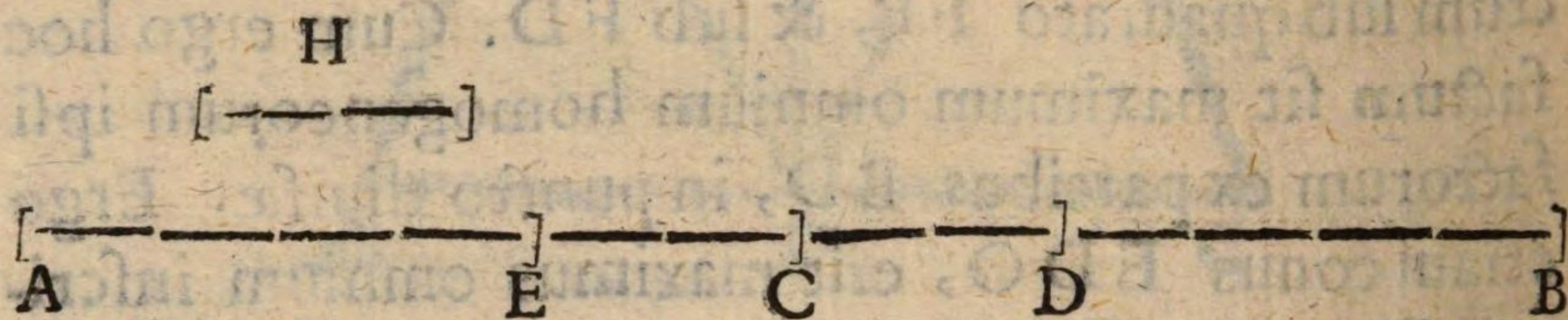
Sed hîc etiam obiter notetur centrum grauitatis amborum conorum esse idem punctum. Sit enim rursum H , centrum grauitatis coni ABC . Ergo qualium BD , est 12, DF , 4, & DH , 3, talium HF , est 1. Ergo H , erit centrum grauitatis etiam coni EDO .

Pariter notetur, conum ABC , esse ad conum EDO , vt 27, ad 4. Nam sic est cubus BD , ad factum sub quadrato BF , & sub FD .

PROPOSITIO LIII.

Datam AD, taliter producere in B, ut BD, sit ad excessum DA, supra dimidiam AB, in data proportione.

Data ratio sit, quam habet AD, ad H, & sic secetur AD, in E, ut sit AE, ad ED, ut H, ad dimidiam AD, & ipsi DE, fiat equalis DB. Ergo si AB,



diuidatur bifariam in C, punctum C, cadet inter A, D. Sit ergo AB, diuisa bifariam in C. Quoniam AE, est æqualis AB, minus EB, ergo etiam dimidia AE, erit æqualis dimidiæ AB, minus dimidia EB. Sed CB, est dimidia AB, & BD, est dimidia EB; ergo dimidia AE, erit æqualis CB, minus DB; nempe CD. Tunc, quoniam factum fuit ut H, ad dimidiam AD, sic AE, ad ED; ergo & ad consequentium dupla. Ergo ut H, ad AD, sic AE, ad EB. Et conuertendo, ut AD, ad H, sic BE, ad EA. Sed ut BE, ad EA, ita BD, dimidia BE, ad dimidiam AE, nempe ad CD, ei æqualem. Ergo ut AD, ad H, sic BD, ad

187

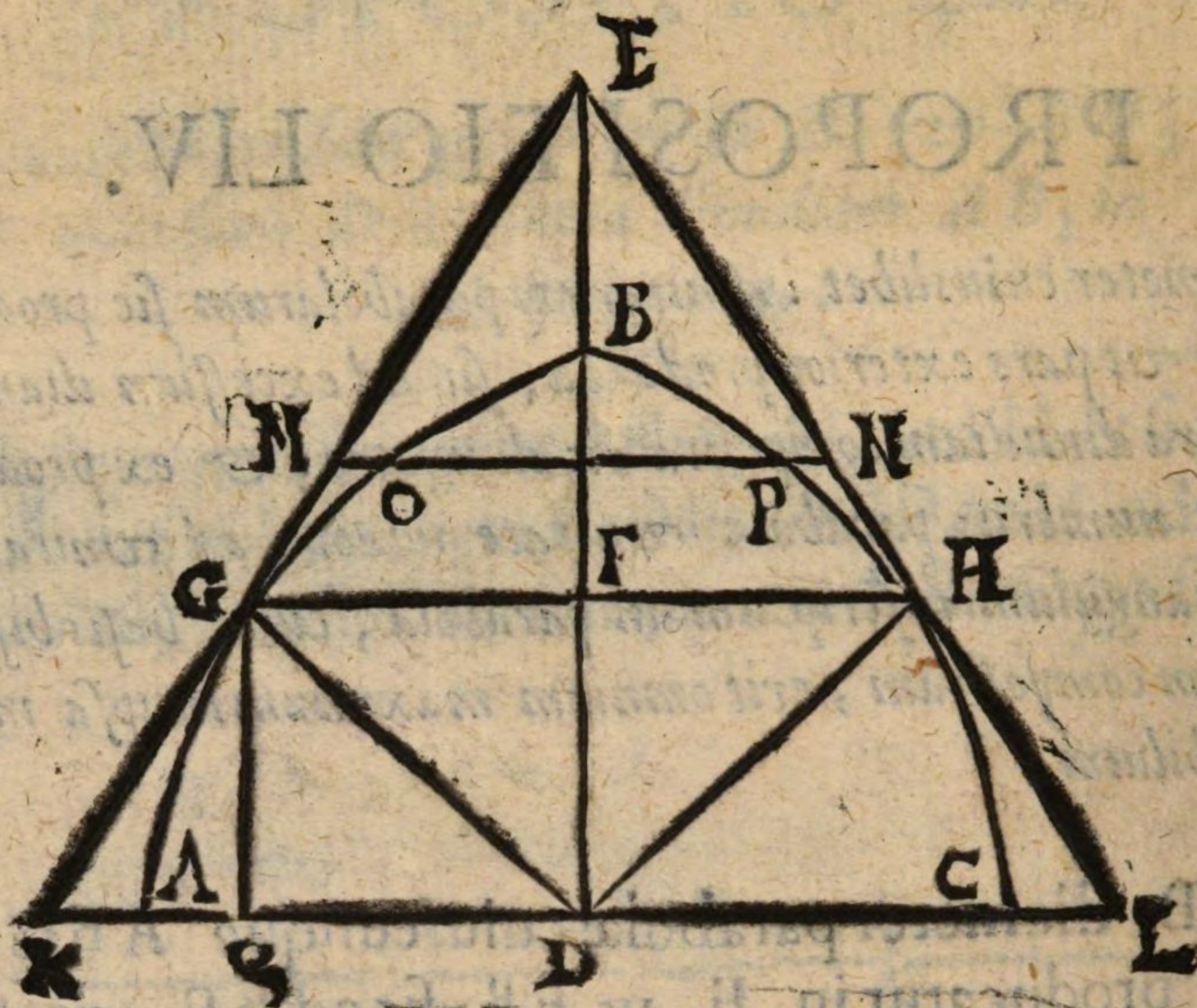
ad DC, excessum DA, supra AC, dimidiam AB.
Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LIV.

*Si diameter cuiuslibet infinitarum parabolarum sic producat-
tur ut pars exterior producta, sit ad excessum diametri
supra dimidiam composita ex diametro, & ex producta
ut numerus parabolæ unitate minor, ad unitatem.
Triangulum inscriptum in parabola, cuius basis bissecet
illam compositam, erit omnium maximum in ipsa inscri-
ptibilem.*

DB, diameter parabolæ cuiuscunque ABC, sic
producatur in E, ut EB, sit ad BF, excessum
BD, supra DF, medietatem DE, ut numerus pa-
rabolæ unitate minutus, ad unitatem, & fiat triangu-
lum GDH. Dico hoc esse maximum omnium in-
scriptibilem in ABC. Ducantur EGK, EHL.
Ergo ex proposito. 50. erunt tangentes parabolam, &
triangulum KEL, erit parabolæ circumscriptum.
Si ergo triangulum GDH, non est maximum para-
bolæ inscriptum, sit hoc triangulum, cuius basis
OP, infra, vel supra GH, quæ producatur usque
ad triangulum in M, & N; & pariter intelligatur
triangulum MDN, cuius basis MN. Cum DE,
secta sit bifariam in F; ergo triangulum GDH, erit
maximum inscriptibilem intra triangulum KEL.
Ergo erit maius triangulo cuius basis MN. Ergo

Aa 2 multo



multo maius triangulo ODP , cuius basis OP .
Quare patet propositum.

SCHOLIUM I.

Ab hac regula generali reperiendi triangulum
maximum inscriptibile in parabola non excludi-
tur prima parabola, nempe triangulum. Cum enim
iubeat regula sic esse producendam diametrum DB ,
ut pars extra sit ad excessum BD , supra medietatem
compositæ ex BD , & ex producta, ut numerus pa-
rabolæ unitate minus ad unitatem; patet in prima
parabola, cuius numerus est unitas, numerum uni-

tate

189

tate minutum esse nihil; unde DB , in triangulo non est producenda; sed supponendo ABC , esse triangulum, BD , est bissecanda, & triangulum GDH , est maximum. Quod sic esse, probatum est supra proposit. 51.

SCHOLIUM II.

Triangulum ergo GDH , maximum inscriptibile intra parabolam ABC , sic diuidit DB , in F , ut BF , sit ad FD , ut unitas ad numerum parabolæ. V. g. in triangulo ut 1, ad 1. In parabola quadratica ut 1, ad 2. In cubica ut 1, ad 3. Et sic in infinitum. In triangulo enim, patet ex dictis. In alijs sic patebit. Quum etenim sit EB , ad BF , ut numerus parabolæ unitate minutus, ad unitatem; erit componendo, EF , ad FB , ut numerus parabolæ ad unitatem. Sed FD , est æqualis EF . Quare patet propositum.

PROPOSITIO LV.

Maximum triangulum inscriptibile in figura constante ex duabus quibuscunque semiparabolis, sic dispositis, ut semibasis euadat diameter, est æquale maximo inscripto in parabola.

Mente intelligamus semiparabolam ABD , duplicari ad partes AD . Dico maximum triangulum

gulum inscriptibile in tali figura, esse æquale triangulo $G D H$. Hoc ostendetur in semiparabola, quod enim probabitur de dimidia, patebit etiam de tota. Sit ergo $G D H$, maximum triangulum inscriptibile in parabola, & ducatur $G Q, B D$, diametro parallela: patet triangulum $G Q D$, esse æquale triangulo $G D F$; & eius duplum, ipsi $G D H$. Dico triangulum $G Q D$, esse maximum &c. Etenim, cum $E D$, sit dupla $D F$, seu $G Q$, etiam $D k$, erit dupla $D Q$. Ergo triangulum $D Q G$, erit maximum inscriptibilium intra triangulum $k E D$. Si ergo $G Q D$, non est maximum inscriptibilium etiam in semiparabola, sit aliud, cuius basis producta usque ad $E k$, secet ipsam, & curuam parabolicam infra, vel supra $G Q$, ut supra dictum est de $M N$. Ergo triangulum cuius basis secans $k E$, erit minus triangulo $G Q D$. Ergo triangulum cuius basis pertingens tantum ad curuam parabolicam, erit multo minus triangulo $G Q D$. Quare patet propositum.

PROPOSITIO LVI.

Si $A B$, sit taliter secta in $C, \& D$, ut $A C$, sit tertia pars $A B$. Erit $C D$, duo tertia $A D$, minus tertia parte $D B$.

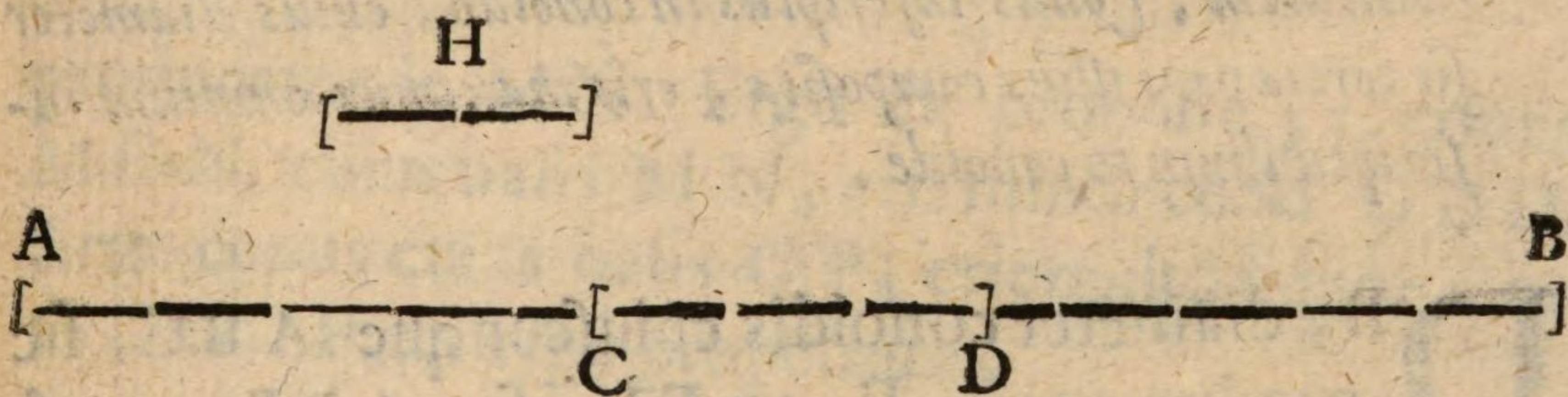
Cum



CUm enim AC, sit tertia pars AB; ergo CB, erit duo tertia AB; nempe duo tertia AD, cum duobus tertijs DB. Ergo CD, erit duo tertia AD, minus tertia parte DB. Quod &c.

PROPOSITIO LVII.

Datam AD, taliter producere in B, ut BD, sit ad excessum DA, supra tertiam partem AB, in data proportione.



Data proportio sit, quam habet AD, ad H; & fiat ut tripla H, cum AD, ad AD, ita dupla AD, ad DB. Patet BD, minorem esse dupla AD. Quare si fiat AC, tertia pars AB, punctum C, cadet inter A, D. Sit ergo AC, tertia pars AB.

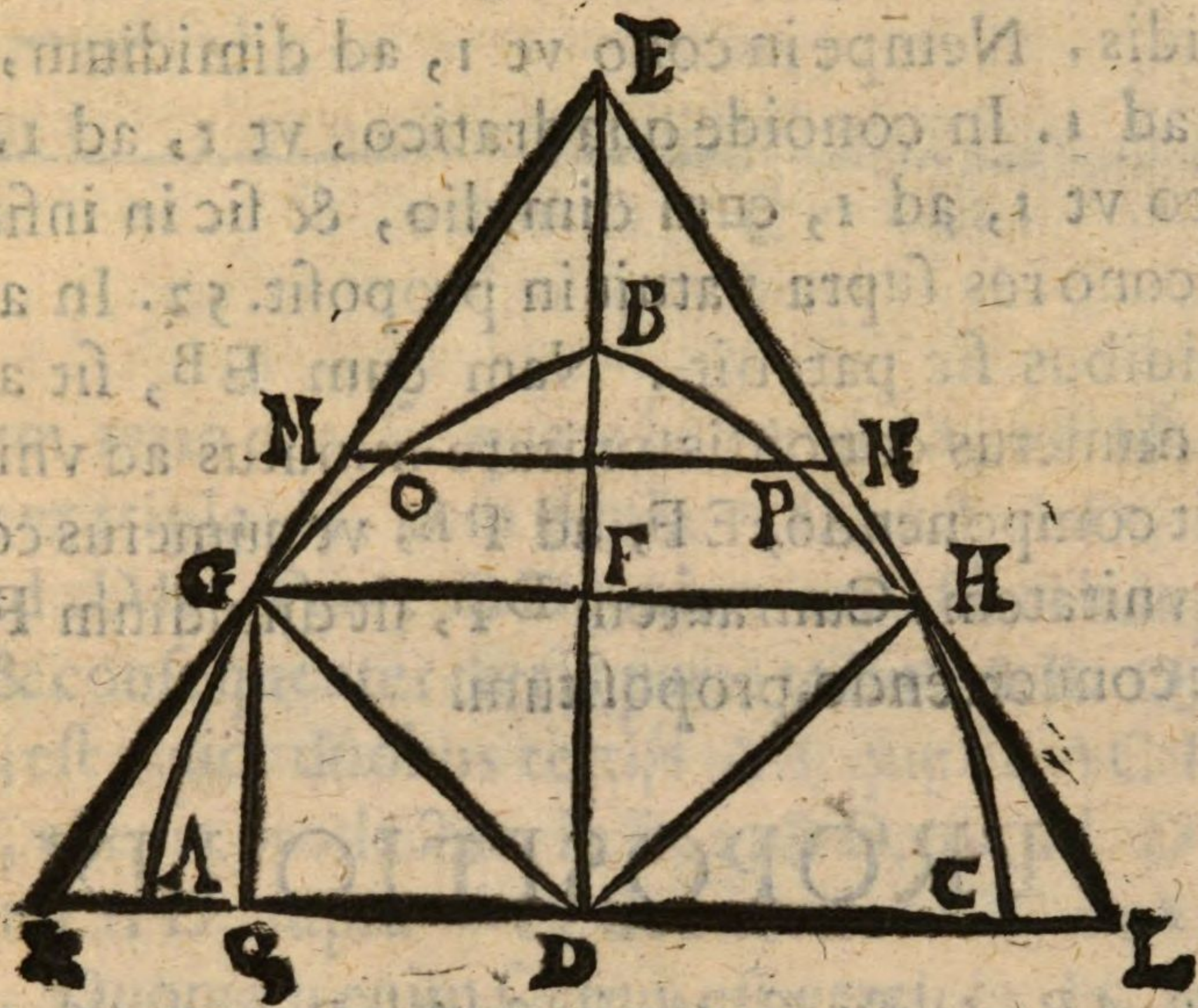
Quoniam, ut tripla H, cum AD, ad AD, sic dupla AD, ad DB; ergo diuidendo ut tripla H, ad

ad AD , ita dupla AD , minus DB , ad DB . Et antecedentium subtrippla. Ergo ut H , ad AD , ita duo tertia AD , minus tertia parte DB , ad DB . Sed ex proposit. anteced. CD , est duo tertia AD , minus tertia parte DB . Ergo ut H , ad AD , sic CD , ad DB . Et conuertendo, ut AD , ad H , sic BD , ad DC , excessum DA , supra AC , tertiam partem AB . Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LVIII.

Si diameter cuiuslibet infinitorum conoideorum sic producat, ut pars exterior producta sit ad excessum diametri supra tertiam partem compositae ex diametro, & ex producta, ut numerus parabolae unitate minutus ad unitatem. Conus inscriptus in conoide, cuius diameter sit tertia pars illius compositae, erit maximus omnium inscriptibilium in conoide.

D B , diameter conoidis cuiuscunque ABC , sic producat in E , ut EB , sit ad BF , excessum BD , supra DF , tertiam partem DE , ut numerus parabolae unitate minutus, ad unitatem; & intelligamus conum $G-DH$, cuius diameter FD . Dico hunc esse omnium maximum inscriptibilium in conoide. Ductis enim tangentibus EKG , EHL , intelligamus conum kEL , circumscriptus conoidi. Et si conus $G-DH$, non est omnium maximus, sit alius cuius basis OP , infra, vel supra GH , quae pro-



producatur in MN . Ergo ex proposit. 52. conus MDN , cuius basis MN , erit minor cono GDH . Ergo conus cuius basis OP , erit multo minor cono GDH . Patet ergo propositum.

SCHOLIUM.

Sicuti ergo supra diximus regulam generalem assignatam in parabolis, habere locum etiam in prima parabola, sic nunc animadvertimus præsentem generalem regulam habere locum etiam in primo conoide, nempe in cono. Hoc autem facile quilibet cognoscet.

Sicuti facile agnoscet DB , taliter secari in F , ut BF , sit ad FD , ut unitas ad dimidium numeri conoidis. Nempe in cono ut 1, ad dimidium, seu ut 2. ad 1. In conoide quadratico, ut 1, ad 1. In cubico ut 1, ad 1, cum dimidio, & sic in infinitum. In cono res supra patuit in proposit. 52. In alijs conoidibus sic patebit. Nam cum EB , sit ad BF , ut numerus conoidis unitate minutus ad unitatem, erit componendo, EF , ad FB , ut numerus conoidis ad unitatem. Cum autem DF , sit dimidium FE , patet conuertendo, propositum.

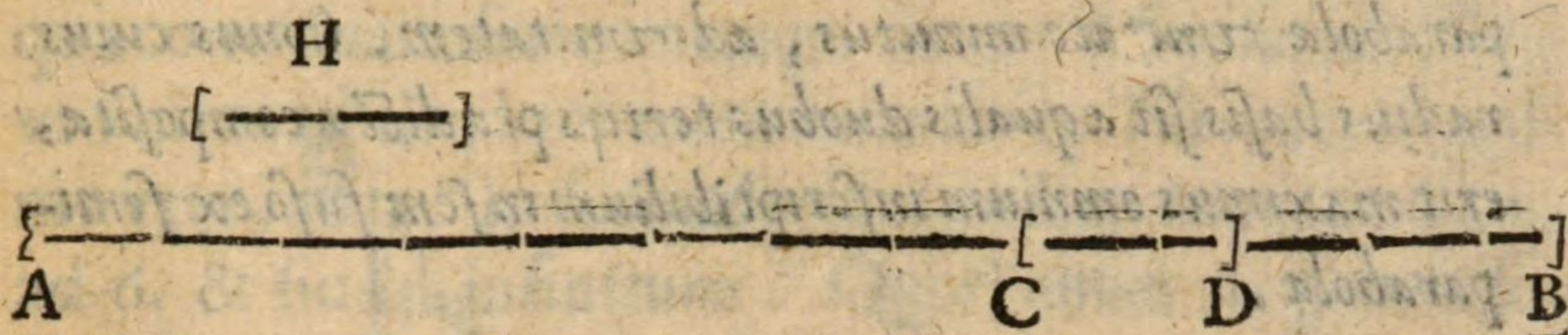
PROPOSITIO LIX.

Si AB , taliter secetur in C , & D , ut AC , sit duo tertia AB . CD , erit tertia pars AD , minus duobus tertijs DB .

CUm enim AC , sit duo tertia AB , ergo CD , erit tertia pars AB ; nempe tertia pars AD , plus tertia parte DB . Quare CD , sola erit tertia pars AD , minus duobus tertijs DB . Quod &c.

PROPOSITIO LX.

Datam AD , taliter producere in B , ut BD , sit ad excessum DA , supra duo tertia AB , in data proportione.



Idem ratio data sit quam habet AD , ad H ; & fiat ut tripla H , cum dupla AD , ad AD , ita AD , ad DB . Patet BD , minorem esse subdupla AD ; & consequenter tertia parte totius AB . Quare AD , est maior duobus tertijs AB , quę sit AC . Dico AD , esse sic productam in B , ut BD , sit ad DC , excessum AD , supra AC , duo tertia AB , ut AD , ad H . Quoniam enim factum est ut tripla H , cum dupla AD , ad AD , ita AD , ad DB ; ego & duabus vicibus diuidendo, erit tripla H , ad AD , ut AD , minus dupla DB , ad DB . Et antecedentium subtripla, nempe ut H , ad AD , ita tertia pars AD , minus duobus tertijs BD , ad BD . Et conuertendo, ut AD , ad H , sic BD , ad tertiam partem AD , minus duobus tertijs DB ; nempe ex prop. ant. ad DC . Quod erat faciendum.

PROPOSITIO LXI.

Si diameter cuiuscunque parabole sic producat ut pars exterior producta, sit ad excessum diametri supra duo ter-

Bb 2 tia

tia compositæ ex diametro, & ex producta, ut numerus parabolæ unitate minutus, ad unitatem. Conus cuius radius basis sit æqualis duobus tertijs prædictæ compositæ, erit maximus omnium inscriptibilium in semifuso ex semiparabola.

Diameter DB, in schem. antec. parabolæ cuiuscunque sic producat in E, ut EB, sit ad BF, excessum BD, supra DF, duo tertia DE, ut numerus parabolæ unitate minutus ad unitatem, & fiat triangulum GQD, ut GQ, sit æqualis FD; intelligamusque semiparabolam ABD, cum triangulo QGD, rotari circa AD. Dico conum ex QGD, esse maximum omnium inscriptibilium in semifuso. Intelligatur tangens EGK, & conus ex triangulo kED, circa kD. Quoniam EF, est tertia pars ED, nempe GE, est tertia pars EK, ergo & QD, erit tertia pars Dk. Ergo conus ex triangulo QGD, erit ex proposit. 52. maximus omnium inscriptibilium in cono ex triangulo kED, reuolutis ambobus circa kD. Si autem conus non sit maximus, sit alius, si est possibile; & deducetur ad absurdum ut factum est prius. Quare ex dictis, patebit propositum.

SCHOLIUM.

Nec etiam in præsentī excluditur à regula generali primus semifusus, nempe conus, ut consideranti patebit.

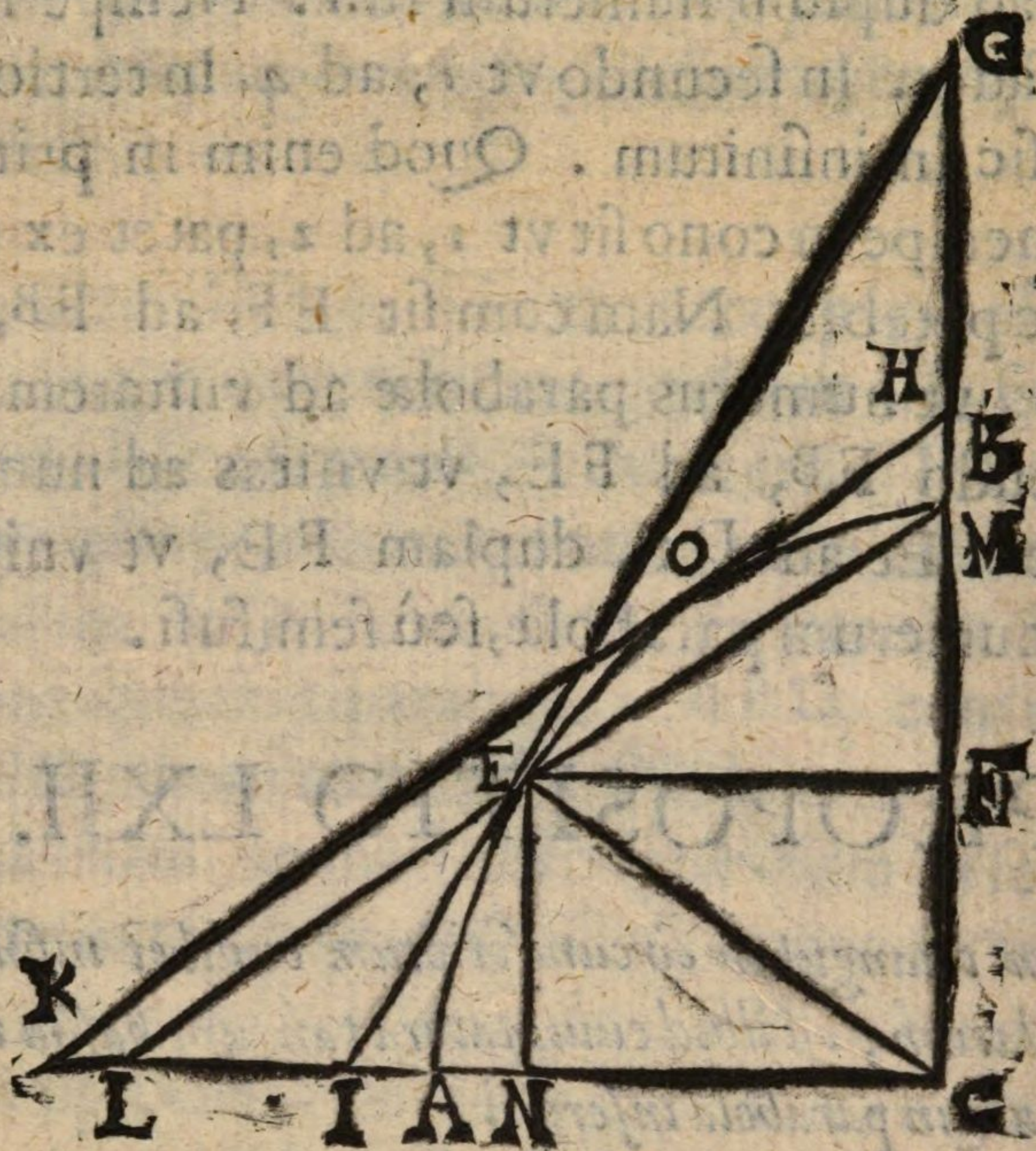
Sed

Sed notetur, in semifusis, BD , secari in F , aliqua continuata serie, nempe sic ut BF , sit ad FD , ut vnitas ad duplum numerum fusi. Nempe in primo ut 1, ad 2. In secundo ut 1, ad 4. In tertio ut 1, ad 6. & sic in infinitum. Quod enim in primo semifuso, nempe in cono sit ut 1, ad 2, patet ex dictis. In alijs sic patebit. Nam cum sit EF , ad FB , componendo, ut numerus parabolæ ad vnitatem; erit conuertendo FB , ad FE , ut vnitas ad numerum parabolæ. Et ad DF , duplam FE , ut vnitas ad duplum numerum parabolæ, seu semifusi.

PROPOSITIO LXII.

Minimum triangulum circumscriptum cuilibet infinitarum parabolarum, est illud cuius latera tangunt basim maximi trianguli in parabola inscripti.

ESto semiparabola quælibet ABC , cuius diameter BC , & in ipsa sit inscriptum maximum triangulum ECF (quod enim dicetur de dimidia intelligetur etiam de tota) sitque ei circumscriptum triangulum $GEIC$. Dico hoc esse minimum omnium circumscriptibilium semiparabolæ. Si non, sit minimum $HO k C$, & per punctum E , ducatur LEM , parallela KH . Patet manifestè triangulum LMC , minus esse triangulo $k O H C$, cum LM , secet, kH , vero tangat parabolam. Quoniam autem ex superioribus, triangulum $EF C$, est maximum



ximum inscriptibilium intra triangulum IGC , quia
 supponitur secare GC , bifariam in F , ergo non erit
 maximum inscriptibilium intra triangulum LMC ,
 quia MC , non secabitur bifariam in F . Ergo trian-
 gulum $EF C$, habebit ad triangulum IGC , ma-
 iorem rationem, quam ad triangulum LMC . Sed
 idem triangulum $EF C$, ad triangulum LMC , ha-
 bet maiorem rationem quam ad triangulum kHC .
 Ergo $EF C$, erit ad IGC , in multo maiori ratione
 quam ad kHC . Ergo IGC , minus erit kHC .

Non

Non ergo KHC , est minimum, sed IGC . Quod
&c.

SCHOLIUM.

Cum autem in proposit. 54. assignatus sit modus
reperiendi triangulum maximum $EF C$, fuit confe-
quenter expositus etiam modus reperiendi triangu-
lum minimum $GI C$.

Insuper notetur, triangulum minimum circum-
scriptum parabolæ, æquale esse triangulo minimo
circumscripto figuræ constante ex duabus semipara-
bolis supra expositis. Triangulum enim $GI C$, du-
plicatum ad partes GC , est æquale eidem $GI C$,
duplicato ad partes IC .

PROPOSITIO LXIII.

*Conus minimus circumscriptus cuilibet infinitorum conoideor-
um vel semifusorum parabolicorum, est ille, qui tangit
basim maximi coni in illis solidis inscripti.*

Sed supponamus conum ex triangulo $EF C$, esse
maximum inscriptibilem intra conoides ex se-
miparabola ABC , circa BC , & conum ex triangulo
 $GI C$, tangere basim coni inscripti. Dico conum ex
triangulo $GI C$, esse minimum circumscriptibilem
conoidi. Si non, sit minimus ille, qui oritur ex trian-
gulo $Hk C$, & ducta LEM , parallela kH , intelli-
gamus

gamus conum ex triangulo LMC , qui utique erit minor cono ex triangulo KHC . Conus ergo ex triangulo $EF C$, cum sit maximus inscriptus in conoide, erit ex dictis, maximus inscriptus in cono ex triangulo $IG C$. Non ergo erit maximus inscriptus in cono ex triangulo $LM C$. Ergo conus ex triangulo $EF C$, erit ad conum ex triangulo $GI C$, in maiori ratione quam ad conum ex triangulo $LC M$. Ergo in multo maiori quam ad conum ex triangulo $Hk C$. Non ergo erit minimus conus ex triangulo kHC , sed ille ex triangulo $IG C$.

Pariter si conus ex triangulo ENC , sit maximus inscriptus in semifuso ex semiparabola ABC , reuoluta circa AC , conus ex triangulo $GI C$, circa $I C$, erit minimus circumscriptus semifuso; quod, ut patet, probabitur eodem modo. Quare patet propositum.

SCHOLIUM.

Cum ergo in propositionibus 58, & 61, assignauerimus conos maximos inscriptos in conoidibus, & in semifusis, pariter explicauimus vnica vice, conos etiam minimos prædictis solidis circumscriptos. Notandum tamen diuersos esse conos minimos his solidis circumscriptos; nam in cono circumscripto conoidi, CF , est tertia pars GC ; in cono vero circumscripto semifuso, CF , est duæ tertiæ partes GC . Quæ omnia cum sint manifestissima ex supradictis, ideo

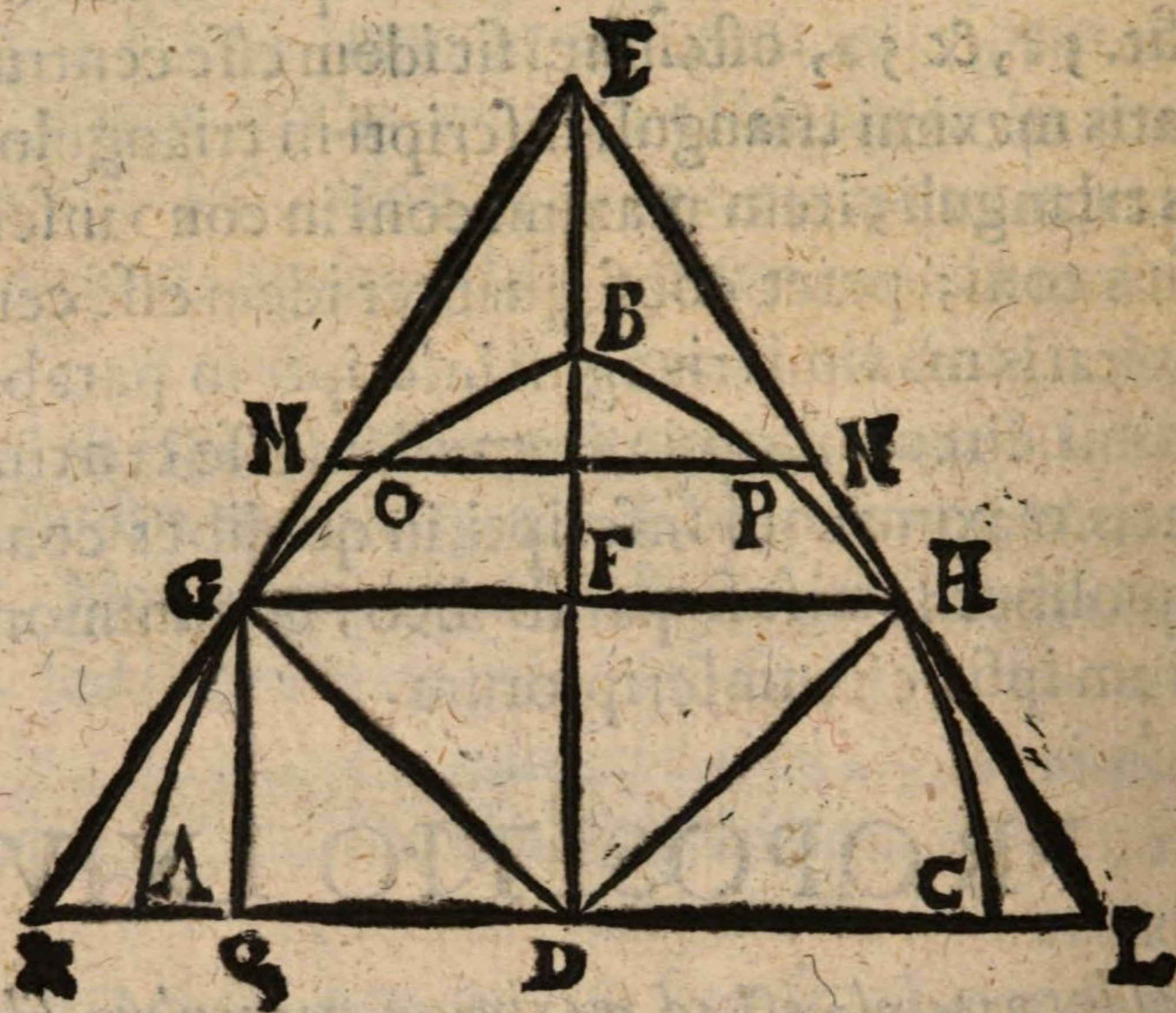
ideo circa ipsa nequaquam immoramur. Solum animaduertendum est, quod cum supra in scholijs proposit. 51, & 52, ostensum sit idem esse centrum grauitatis maximi trianguli inscripti in triangulo, & ipsius trianguli; item maximi coni in cono inscripti, & ipsius coni; patet consequenter idem esse centrum grauitatis maximi trianguli inscripti in parabola, & minimi circumscripti: item idem esse centrum grauitatis maximi coni inscripti in quolibet conoide, & in quolibet semifuso parabolico, & minimorum conorum ipsis circumscriptorum.

PROPOSITIO LXIV.

Qualibet parabola est ad maximum triangulum sibi inscriptum, ut pars semibasis parabola, quæ se habeat ad semibasim ut binarium ad numerum parabola unitate auctum, ad ultimam proportionalem proportionis semibasis parabola, ad semibasim trianguli, continuatae in tot terminos, ut numerus eorum excedat numerum parabola binario.

ESto quælibet parabola ABC , sitque maximum triangulum in ea inscriptum $G D H$, ut supra dictum est. Dico parabolam esse ad triangulum $G D H$, ut talis pars $A D$, quæ se habeat ad $A D$, ut binarium ad numerum parabola unitate auctum, ad ultimum terminum proportionis $A D$, ad $G F$, continuatae in tot terminos, ut numerus eorum exce-

Cc dat



dat numerum parabolæ binario. V. g. in prima pa-
 rabola, nempe in triangulo ut AD , ad tertiam pro-
 portionalem. In quadratica ut duo tertia AD , ad
 quartam. In cubica ut duo quarta, seu dimidium
 AD , ad quintam. Et sic in infinitum. Sit illa ultima
 proportionalis AQ . In prima parabola, nempe in
 triangulo res est evidens, quia sicuti triangulum
 ABC , esset quadruplum trianguli GDH , maximi
 sibi inscripti, sic AD , quia AD , esset dupla GF ,
 esset quadrupla AQ , tertiæ proportionalis. In alijs
 parabolis nè schemata multiplicemus, intelligamus
 inscripta triangula etiam ABC , quorum bases AC ,
 diametri DB . Triangulum ABC , ad triangulum
 GDH ,

GDH, habet rationem compositam ex rationibus AD, ad GF, & BD, ad DF. Sed BD, ad DF, est ex schol. 2. proposit. 54. componendo, ut numerus parabolæ unitate auctus ad numerum parabolæ, & pariter ex natura parabolæ, cum sit BD, ad DF, ut potestas AD, eiusdem gradus cum parabola, ad excessum ipsius supra similem potestatem GF, nempe ad tot tales potestates GF, quotus est numerus parabolæ. Ergo ratio trianguli ABC, ad GDH, componetur ex ratione AD, ad GF, & ex ratione potestatis AD, eiusdem gradus cum parabola ad tot similes potestates GF, quotus est numerus parabolæ. Sed ex istis rationibus componitur quoque ratio potestatis AD, vno gradu altioris potestate parabolæ, ad tot similes potestates GF, quotus est numerus parabolæ. Ergo triangulum ABC, erit ad triangulum GDH, ut illa potestas AD, ad illas potestates GF. Sed ut potestas AD, ad vnā potestatem GF, sic DA, ad AQ: ergo & ut potestas dicta AD, ad omnes illas potestates GF, sic DA, ad tot AQ. Erit ergo triangulum ABC, ad triangulum GDH, ut DA, ad tot AQ, quotus est numerus parabolæ. Quoniam vero ex proposit. 1. lib. prim est conuertendo, parabola ABC, ad parallelogrammum sibi circumscriptum ut numerus parabolæ ad numerum parabolæ unitate auctum, nempe ut duplus numerus parabolæ, ad duplum numerum binario auctum; ergo parabola ABC, erit ad triangulum ABC, dimidium parallelogrammi

dictum consequens, sic vnum binarium antecedentis, ad unitatem consequentis. Erit ergo ut duæ partes illius magnitudinis diuisæ in tot partes quotus est numerus parabolæ duplus, & consequenter ipsius AD, diuisæ in tot partes quotus est numerus parabolæ unitate auctus, ad AQ. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Cum autem in proposit. 55, visum sit, triangulum GQD, esse dimidium trianguli maximi inscripti in figura constante ex duabus semiparabolis; sequitur hoc esse ad triangulum maximum sibi inscriptum in supra dicta ratione, continuata ratione AD, ad DQ, diametrum trianguli æqualem GF, ut dictum est. Pariter cum minima triangula circumscripta tam infinitis parabolis, quam infinitis figuris constantibus ex duabus semiparabolis, sint quadrupla maximorum triangulorum in ipsis inscriptorum; sequitur prædictas figuras esse ad minima triangula circumscripta, ut idem antecedens ad quadruplum consequentis: vel ut quarta pars antecedentis ad idem consequens.

PROPOSITIO LXV.

Quodlibet conoides parabolicum est ad maximum conum sibi inscriptum, ut pars radij basis conoidis, quæ se habeat ad totum radium ut unitas ad numerum conoidis binario auctum,

auctum, ad sextam partem ultima proportionalis proportionis dicti radij ad radium basis coni, continuatae in tot terminos ut numerus eorum excedat numerum conoidis ternario.

Sed supponamus ABC , esse conoides parabolium, & DGH , maximum conum illi inscriptum, &c. & ratio AD , ad GF , continuetur in tot terminos ut numerus excedat numerum conoidis ternario, sitque ultimus terminus AQ . Dico conoides ad conum esse ut pars AD , quæ se habeat ad dictam AD , ut vnitas ad numerum conoidis binario auctum, ad sextam partem AQ . V. g. in primo conoide, nempe in cono, ut tertia pars AD , ad sextam partem AQ , quartæ proportionalis. In secundo, ut quarta pars AD , ad sextam partem AQ , quintæ proportionalis. In cubico, ut quinta pars AD , ad sextam partem AQ , sextæ. Et sic in infinitum.

In cono, pater. Quia si ABC , est conus, BF , est dupla FD . Cumque pateat ex propof. 2, ABC , esse ad DGH , ut cubus DB , ad factum sub quadrato BF , in FD , nempe in medietatem BF ; nempe ad medietatem cubi BF ; & cum sit ut cubus DB , ad medietatem cubi BF , sic cubus AD , ad medietatem cubi GF ; nempe tertia pars cubi AD , ad sextam partem cubi GF ; & pariter cum sit ut cubus AD , ad cubum GF , sic AD , ad AQ , & ut tertia pars cubi AD , ad sextam partem cubi GF ,
 sic

sic tertia pars AD , ad sextam partem AQ ; ergo pater propositum.

In alijs vero conoidibus, mente intelligamus conum ABC , inscriptum in conoide: ergo conus ABC , ad conum GDH , habet rationem compositam ex ratione quadrati AD , ad quadratum GF , & ex ratione BD , ad DF . Sed ex natura conoidis, BD , ad DF , est ut potestas AD , eiusdem gradus cum conoide, ad excessum eiusdem supra similem potestatem GF ; & pariter ex schol. proposit. 58, componendo, est BD , ad DF , ut dimidium numeri conoidis unitate auctum ad dimidium numeri conoidis; nempe ut numerus conoidis binario auctus, ad numerum conoidis; unde excessus prædictæ potestatis AD , supra similem potestatem GF , continet tot partes prædictæ potestatis AD , diuisæ in tot partes quotus est numerus conoidis binario auctus, quotus est numerus conoidis; nempe tot medietates similis potestatis GF , quotus est numerus conoidis. Ergo proportio coni ABC , ad conum GDH , componetur ex ratione quadrati AD , ad quadratum GF , & ex ratione potestatis AD , ad tot medietates similis potestatis GF , quotus est numerus conoidis. Ergo conus ABC , erit ad conum GDH , ut potestas AD , duplici gradu altior potestate conoidis, ad factum sub quadrato GF , & sub prædictis medietatibus potestatis GF ; nempe ad tot medietates similis potestatis GF , quotus est numerus conoidis; nempe ut AD , ad tot medietates

tes AQ , quotus est numerus conoidis. At cum ex
 proposit. 15, lib. 3. sit conuertendo, conoides ABC ,
 ad cylindrum sibi circumscriptum vt numerus co-
 noidis ad numerum conoidis binario auctum; nempe
 vt triplus numerus conoidis, ad triplum numerum
 conoidis senario auctum: erit idem conoides ad co-
 num ABC , tertiam partem talis cylindri, vt tri-
 plus numerus conoidis, ad numerum conoidis bina-
 rio auctum: nempe vt tot partes AD , diuisæ in tot
 partes quotus est numerus conoidis binario auctus,
 quotus est triplus numerus conoidis, ad AD . Ergo
 ex æquali, erit conoides ABC , ad conum GDH ,
 vt prædictæ partes AD , quotus est triplus numerus
 conoidis, ad tot medietates AQ , quotus est nume-
 rus conoidis. Et diuisis vtrisque terminis per 3, erit
 conoides ABC , ad conum GDH , vt tres partes
 AD , diuisæ prædicto modo, ad dimidiam AQ . Et
 subtriplando hos terminos, vt vnica talium partium
 AD , ad sextam partem AQ . Quod erat ostenden-
 dum.

SCHOLIUM.

Cum ex supra dictis, constet, minimum conum
 kEL , conoidi circumscriptum, esse maximum cir-
 cumscriptum cono GDH ; & cum ex schol. prop.
 52, constet conum GDH , esse ad conum kEL , vt
 4, ad 27, sequitur conoides esse ad conum kEL , vt
 prædicta pars AD , ad AQ , cum eius octaua parte.

PRO-

PROPOSITIO LXVI.

*Quilibet semifusus parabolicus, est ad maximum conum sibi inscriptum ut unica pars quadrati semibasis parabola diuisi in tot partes quot unitates continet tertia pars re-
ctanguli contenti sub numero fusi unitate aucto, & sub
duplo numero fusi unitate aucto, ad duo reſtangula con-
tenta ſub duobus vltimis terminis proportionis basis ſemi-
parabola ad altitudinem coni, continuata in tot terminos,
ut numerus eorum excedat numerum fuſi binario.*

Sed intelligamus ſemiparabolam ABD , cuius
basis AD , diameter BD , cum triangulo
 GQD , rotari circa AD , adeo ut conus genitus ſit
maximus in ſemifuſo inſcriptus: & ratio AD , ad
 DQ , ſit continuata ad tot terminos, ut numerus co-
rum excedat numerum fuſi binario; ſintque
duo vltimi minimi termini QA , Ak . Dico ſemi-
fuſum ex BAD , eſſe ad conum ex GQD , ut vnica
pars quadrati AD , diuiſi in tot partes quot vnita-
tes continet tertia pars reſtanguli ſub numero fuſi
unitate aucto, & ſub duplo numero fuſi unitate au-
cto, ad duo reſtangula QAk . V. g. in primo ſemi-
fuſo, ut dimidium quadrati AD , ad illa duo reſtan-
gula. In ſecundo, ut quinta pars quadrati AD . In
tertio ut vnica pars quadrati AD , diuiſi in 9, cum
tertia parte vnus. Et ſic diſcurrendo.

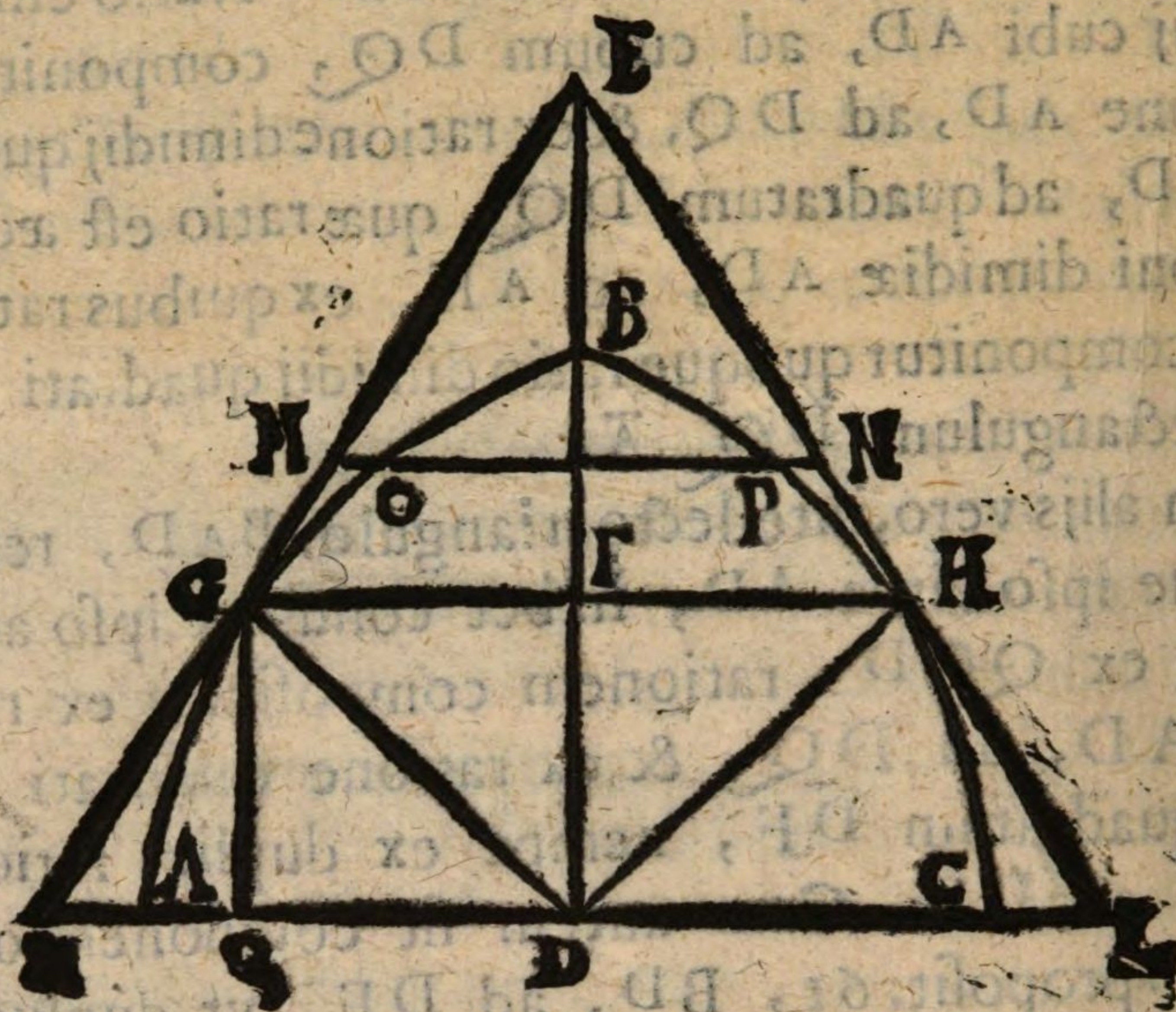
Quod enim in cono ſic reſ ſe habeat, patet. Quia

Dd in

stum; quia rationes antecedentium ad consequentia componuntur ex iisdem rationibus. Ratio enim dimidij cubi AD , ad cubum DQ , componitur ex ratione AD , ad DQ , & ex ratione dimidij quadrati AD , ad quadratum DQ , quæ ratio est æqualis rationi dimidiæ AD , ad AK , ex quibus rationibus componitur quoque ratio dimidij quadrati AD , ad rectangulum DQ , AK .

In alijs vero, intellecto triangulo BAD , reuolutoque ipso circa AD , habet conus ex ipso ad conum ex QGD , rationem compositam ex ratione AD , ad DQ , & ex ratione quadrati BD , ad quadratum DF , nempe ex duplici ratione BD , ad DF . Cum autem sit componendo, ex schol. proposit. 61, BD , ad DF , vt duplus numerus fusi vnitate auctus ad duplum numerum fusi; & cum pariter sit BD , ad DF , vt potestas AD , eiusdem gradus cum fuso ad excessum ipsius supra similem potestatem GF , nempe ad tot similes potestates GF , quotus est duplus numerus fusi. Ergo proportio coni ex triangulo BAD , ad conum ex triangulo QGD , componetur ex ratione AD , ad DQ , & ex ratione potestatis AD , ad tot similes potestates GF , seu QD , quotus est duplus numerus fusi, & ex ratione BD , ad DF . Sed ex rationibus AD , ad DQ , & potestatis dictæ AD , ad dictas potestates QD , componitur ratio potestatum vnus gradus altioris. Ergo ratio coni ad conum componetur ex ratione potestatis AD , vno

Dd 2 gra-



gradu altioris potestate fusi ad tot similes potestates
 DQ , quotus est duplus numerus fusi, & ex ratione
 BD , ad DF . Sed cum sit ut potestas AD , vno
gradu altior potestate fusi ad similem potestatem
 DQ , sic DA , ad Ak ; unde & ut potestas AD , ad
tot potestates DQ , quotus est duplus numerus fusi
sic DA , ad tot numero Ak . Ergo ratio coni ex
triangulo BAD , ad conum ex triangulo GQD ,
componetur ex ratione AD , ad tot Ak , quotus est
duplus numerus fusi, & ex ratione BD , ad DF .
Rursum BD , ad DF , patuit supra, esse ut potestas
 AD , eiusdem gradus cum fuso ad tot similes potesta-
tes QD , quotus est duplus numerus fusi; & ut talis
pote-

potestas ad tales potestates sic, DA , ad tot numero
 AQ . Ergo ratio coni ad conum componetur ex ra-
 tionibus AD , ad tot Ak , & eiusdem AD , ad
 tot QA , quotus est duplus numerus fusi: nimirum
 erit conus ad conum vt quadratum AD , ad rectan-
 gulum sub illis tot kA , & AQ , quotus est duplus
 numerus fusi. Ast quoniam ex proposit. 16, lib. 2. est
 conuertendo, semifusus ex semiparabola BAD , ad
 cylindrum sibi circumscriptum, vt quadratū numeri
 parabolę ad rectangulū sub dimidio numeri parabolę
 vnitate aucti, & sub duplo numero parabolę vnitate
 aucto; vel vt duplum ad duplum; nempe vt duplum
 quadratum numeri parabolę ad rectangulum sub nu-
 mero vnitate aucto, & sub duplo numero vnitate au-
 cto, vnde est semifusus ad tertiam partem cylindri,
 nempe ad conum ex triangulo BAD , vt antece-
 dens, ad tertiam partem consequentis; & vt antece-
 dens ad tertiam partem consequentis, sic tot partes
 quot vnitates continet duplum quadratum numeri
 fusi (hoc est rectangulum sub numero, & sub duplo
 numero) quadrati AD , diuisi in tot partes quot vni-
 tates continet tertia pars rectanguli sub numero fusi
 vnitate aucto, & sub duplo numero vnitate aucto, ad
 quadratum AD . Ergo ex æquali, erit semifusus ad
 conum ex GQD , vt tot partes quadrati AD , diuisi
 vt dictum est, quot vnitates continet rectangulum
 sub numero fusi, & sub duplo numero, ad tot rectan-
 gula sub tot kA , & sub tot AQ , quotus est du-
 plus numerus fusi. Cum vero numerus antecedentis,
 nempe

nempe partium quadrati AD , sit numerus ortus ex numero fusi, & ex duplo numero; & numerus rectangulorum ex kA , AQ , sit numerus ortus ex duplo numero, & ex duplo numero; sequitur primum numerum, nempe quadratorum, esse dimidium numeri secundi, nempe rectangulorum KAQ . Quare quot unitates continet numerus quadratorum, tot binaria continet numerus rectangulorum. Erit ergo ut omnia illa quadrata ad omnia rectangula, sic unicum quadratum ad unicum rectangulum. Erit ergo semifusus ad conum ex GQD , maximum sibi inscriptum ut unica pars quadrati AD , diuisi in tot partes quot unitates continet tertia pars rectanguli sub numero fusi unitate aucto, & sub duplo numero unitate aucto, ad duo rectangula QAK . Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Cum ergo conus minimus circumscriptus semifuso sit ad maximum inscriptum ut 27, ad 4; sequitur semifusum esse ad ipsum, ut prædictum antecedens ad 13, rectangula QAK , cum dimidio.

Hæc ergo sunt benigne lector, quæ pro tertia hac vice determinauimus tibi communicare. Impressio nostri operis de Infinitis Parabolis absoluta fuit die quarta præteriti Mensis Iulij. Compositio Miscellanei præsentis terminata fuit die 26. Augusti. Hæc tibi exponimus ut habeas vnde colligas fauorabiles

excus-

excusationes pro imperfectionibus in ipso contentis. Sufficere enim arbitramur notificare compositum fuisse tempore æstiuo, & dum Canicula, & Leo magis, magisque feruent. Hæc etenim tempora potius otio, & quieti, quam speculationibus geometricis, hoc est sublimibus, videntur accomodata. Verum propemodum impossibile est cohibere intellectum nè vagetur vbicunque ei libuerit. Præterquamquod in inuentionibus rerum geometricarum, expectandæ sunt illæ fauorabiles cælestes directiones, quæ influunt non quando nos, sed quando ipsæ volunt. Tabellam errorum non exhibemus; relinquimus enim illos tuæ diligentiae, tuæque humanitati. Diligentiae vt illos corrigas; humanitati vt eos libenter sustineas; memor impressionem librorum matrem esse errorum; atque in impressione speculationum abstractarum, intellectum auctoris sic incumbere substantiæ, vt accidentia cogatur negligere. Vale.

F I N I S.

[The page contains faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side.]

Angeli, Stefano <<degli>>,

Miscellaneum hyperbolicum

Venetia 1659

4 Math.p. 11

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053246-2